

Πρόβλημα 1. (10 μονάδες) Κατασκευάστε μια ακολουθία $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ τέτοια ώστε $\int_0^1 f_n \leq 1$ αλλά $\int_0^1 f_n^2 \rightarrow \infty$.

Λύση: Έστω $f_n(x) = n\chi_{[0, 1/n]}(x)$. Τότε $\int f_n = n \cdot \frac{1}{n} = 1$ και $\int f_n^2 = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n \rightarrow \infty$.