Πανεπιστημιο Κρητης, Τμ. Μαθηματικων, Πραγματικη Αναλυση, Ανοιξη 2009-10, Μιχ. Κολουντζακης

4ο μικρό διαγώνισμα, 21 Απρ. 2010

Πρόβλημα 1. (10 μονάδες) Δείξτε με κάθε λεπτομέρεια ότι $\int_{(0,1)} \frac{1}{x} = +\infty$.

Λύση:

Έστω $0 < \epsilon < 1/2$. Τότε $\int_{(0,1)} \frac{1}{x} \ge \int_{[\epsilon,1-\epsilon]} \frac{1}{x}$ (αφού η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι μη αρνητική και το χωρίο ολοκλήρωσης έχει ελαττωθεί) και αρκεί να δείξουμε ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλο αν το ϵ επιλεγεί αρκετά μικρό. Όμως η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[\epsilon, 1-\epsilon]$ οπότε το δεύτερο ολοκλήρωμα ισούται με το ολοκλήρωμα Riemann

$$\int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{1}{x}\,dx = \ln(1-\epsilon) - \ln\epsilon = \ln(1-\epsilon) + \ln\frac{1}{\epsilon},$$

το οποίο τείνει στο $+\infty$ για $\epsilon \to 0$.