Πανεπιστημιο Κρητης, Τμ. Μαθηματικων, Πραγματικη Αναλυση, Ανοιξη 2009-10, Μιχ. Κολουντζακης

3ο μικρό διαγώνισμα, 3 Μαρ. 2010

Πρόβλημα 1. (10 μονάδες) Έστω σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ με $m_1^*(E) < \infty$ και $\epsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει ανοιχτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}$ που περιέχει το E και τέτοιο ώστε

$$m_1^*(U) \le m_1^*(E) + \epsilon.$$

Λύση Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου υπάρχει κάλυψη του E με διαστήματα I_n, $n = 1, 2, \ldots$, τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \le m_1^*(E) + \frac{\epsilon}{2},$$

όπου $|I|$ δηλώνει το μήκος του διαστήματος I. Για κάθε n παίρνουμε ένα **ανοιχτό** διάστημα J_n που περιέχει το I_n και έχει μήκος

$$|J_n| \le |I_n| + \frac{\epsilon}{2} 2^{-n}.$$

Ορίζουμε $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \supseteq E$ το οποίο είναι ανοιχτό σύνολο αφού τα J_n είναι ανοιχτά σύνολα και οποιαδήποτε ένωση ανοιχτών είναι ανοιχτό σύνολο.

Από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου ισχύει

$$m_1^*(U) \le \sum_{n=1}^{\infty} m_1^*(J_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} (|I_n| + \frac{\epsilon}{2} 2^{-n}) \le \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2} 2^{-n} \le m_1^*(E) + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \le m_1^*(E) + \epsilon.$$