1ο μικρό διαγώνισμα, 19 Φεβ. 2010

Πρόβλημα 1. (10 μονάδες)
Τα σύνολα $A_1, A_2, \ldots \subseteq X$ είναι όλα αριθμήσιμα. Δείξτε ότι και η ένωσή τους είναι αριθμήσιμη.

Λύση: Πρέπει να δείξουμε ότι τα στοιχεία του συνόλου $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ μπορούν να απαριθμηθούν το ένα μετά το άλλο σε μια ακολουθία. Ο απλούστερος τρόπος να γίνει αυτό είναι ο εξής: πρώτα γράφουμε το 1ο στοιχείο του A_1, μετά γράφουμε τα δύο πρώτα στοιχεία των A_1, A_2, μετά τα τρία πρώτα στοιχεία των A_1, A_2, A_3, κ.ο.κ. Με αυτό τον τρόπο όλα τα στοιχεία του A θα γραφούν κάτω κάποια στιγμή οπότε έχουμε απαριθμήσει το A.

Σχόλιο: Παρατηρείστε ότι με αυτό τον τρόπο όλα τα στοιχεία του A θα γραφούν κάτω άπειρες φορές το καθένα. Αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα μια και δεν απαιτείται η απαρίθμηση των στοιχείων του A να αναφέρει κάθε στοιχείο ακριβώς μια φορά αλλά τουλάχιστον μια. Αν όμως επιμένετε να έχετε μια απαρίθμηση του A χωρίς να αναφέρετε κανένα στοιχείο δύο φορές τότε δεν έχετε παρά να ελέγχετε, κατά τη διάρκεια της παραπάνω διαδικασίας, αν έχετε ήδη γράψει κάτω το στοιχείο που ετοιμάζεστε να γράψετε, και, αν ναι, τότε να το παραλείπετε.

Πρόβλημα 2. (5 μονάδες bonus)
Έστω X το σύνολο όλων των ακολουθιών $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $a_n \subseteq \{0,1\}$ που είναι τελικά 0 (για κάθε τέτοια ακολουθία δηλ. υπάρχει δείκτης πέρα από τον οποίο όλοι οι όροι είναι 0). Δείξτε ότι το σύνολο X είναι αριθμήσιμο.

Λύση: Για κάθε στοιχείο του X, εκτός από την ακολουθία $z = (0, 0, 0, , \ldots)$ με όλα τα στοιχεία ίσα με 0, υπάρχει μια τελευταία θέση όπου έχει 1. Ας γράψουμε $X_0 = \{z\}$ και για $k \geq 1$ ας είναι X_k το σύνολο όλων των ακολουθιών με τελευταία θέση ίση με 1 τη θέση k.

Το σημαντικό εδώ είναι ότι κάθε σύνολο X_k είναι πεπερασμένο (για την ακρίβεια έχει 2^{k-1} στοιχεία αλλά αυτό δεν μας χρειάζεται) ακριβώς γιατί μετά από τη θέση k ξέρουμε ότι έχει συνέχεια μηδενικά.

Αν λοιπόν εμείς αραδιάσουμε πρώτα τα στοιχεία του X_0, μετά τα στοιχεία του X_1, μετά τα στοιχεία του X_2, κ.λ.π., θα έχουμε αραδιάσει όλα τα στοιχεία του X αφού κάθε στοιχείο του X ανήκει σε κάποιο X_k. Η μέθοδος αυτή απαρίθμησης των στοιχείων του X δουλεύει ακριβώς επειδή κάθε X_k είναι πεπερασμένο σύνολο και συνεπώς κάποια στιγμή τελειώνουν τα περιεχόμενά του, αρχίζουν τα περιεχόμενα του X_{k+1}, κ.ο.κ. Αν έστω και ένα από τα X_k ήταν άπειρο αυτή η μέθοδος απαρίθμησης δε θα δούλευε μια και θα "κόλλαγε" σε αυτό το άπειρο σύνολο για πάντα.