Πανεπ. Κρητης, Τμημα Μαθηματικων, Πραγματικη Αναλυση, Ανοιξη 2009-10, Μιχ. Κολουντζακης

9ο φυλλάδιο προβλημάτων, 3 Μαΐου 2010

Πρόβλημα 1. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και Lebesgue μετρήσιμες f, f_n $(n \in \mathbb{N})$ στο A ώστε να ισχύει $0 \le f_n \le f$ L-σχεδόν παντού στο A για κάθε n και $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ L-σχεδόν παντού στο A. Αποδείξτε ότι $\int_A f = \lim_{n\to+\infty} \int_A f_n$.

(Υπόδειξη: Από την $f_n \le f$ συνεπάγεται $\limsup_{n\to+\infty} \int_A f_n \le \int_A f$ και χρησιμοποιήστε και το λήμμα του Fatou.)

Πρόβλημα 2. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$, Lebesgue μετρήσιμες f_n $(n \in \mathbb{N})$ στο A και Lebesgue ολοκληρώσιμη h στο A ώστε να ισχύει $h \le f_n$ L-σχεδόν παντού στο A για κάθε n. Αποδείξτε ότι $\int_A (\liminf_{n\to+\infty} f_n) \le \liminf_{n\to+\infty} \int_A f_n$.

(Υπόδειξη: Θεωρήστε τις $f_n - h$.)

Πρόβλημα 3. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ με $m_d(A) < +\infty$ και Lebesgue μετρήσιμες f, f_n $(n \in \mathbb{N})$ στο A ώστε να ισχύει $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ ομοιόμορφα στο A. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} \int_A |f_n - f| = 0$.

(Υπόδειξη: Αν $M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\}$, τότε $\lim_{n\to+\infty} M_n = 0$.)

Πρόβλημα 4. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και Lebesgue ολοκληρώσιμη f στο A. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $f_n = \max\big\{\min\{f, n\}, -n\big\}$ $(n \in \mathbb{N})$ και αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} \int_A f_n = \int_A f$.

(Υπόδειξη: Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης.)

Πρόβλημα 5. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και Lebesgue ολοκληρώσιμες f, f_n $(n \in \mathbb{N})$. Αποδείξτε ότι, αν $\lim_{n\to+\infty} \int_A |f_n - f| = 0$, τότε $\lim_{n\to+\infty} \int_A |f_n| = \int_A |f|$.

(Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $\big| \int_A |f_n| - \int_A |f| \big| \le \int_A |f_n - f|$.)

Πρόβλημα 6. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και Lebesgue ολοκληρώσιμες f, f_n $(n \in \mathbf{N})$ στο A ώστε $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ L-σχεδόν παντού στο A. Αν $\lim_{n\to+\infty} \int_A |f_n| = \int_A |f|$, τότε αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} \int_A |f_n - f| = 0$.

(Υπόδειξη: Εφαρμόστε την προπροηγούμενη άσκηση στις $F_n = |f_n - f|$, $G_n = |f_n| + |f|$, $F = 0$ και $G = 2|f|$.)

Πρόβλημα 7. Κατασκευάστε μια ακολουθία $f_n : [0,1] \to [0,+\infty)$ τέτοια ώστε $\int_0^1 f_n \le 1$ αλλά $\int_0^1 f_n^2 \to \infty$.

Επίσης μια ακολουθία $f_n : [0,1] \to [0,+\infty)$ τέτοια ώστε $\int_0^1 f_n^2 \le 1$ αλλά $\int_0^1 f_n^p \to \infty$ για κάθε $p > 2$.