Πανεπ. Κρητης, Τμημα Μαθηματικων, Πραγματικη Αναλυση, Ανοιξη 2009-10, Μιχ. Κολουντζακης

7ο φυλλάδιο προβλημάτων, 14 Απρ. 2010

Πρόβλημα 1. Έστω $A_n \subseteq \mathbb{R}^d$, $A = \liminf_n A_n$, $B = \limsup_n A_n$. Δείξτε ότι $\chi_A = \liminf_n \chi_{A_n}$ και $\chi_B = \limsup_n \chi_{A_n}$.

Πρόβλημα 2. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι απλές και ποιες είναι οι κανονικές τους αναπαραστάσεις;

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}, \\ 0, & \text{αν } x \notin \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}, \end{cases} \qquad \phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

$$\phi(x) = [x] \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \phi(x) = [x] \quad (-3 \le x \le 4).$$

Πρόβλημα 3. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του ολοκληρώματος Lebesgue μη αρνητικών συναρτήσεων για να υπολογίσετε το $\int_{[0,+\infty)} f$ των

$$f = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \chi_{[k-1,k)}, \quad f = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \chi_{[k-1,k)}, \quad f = \sum_{k=1}^{+\infty} k \chi_{(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]}.$$

(Υπόδειξη: Για την πρώτη f δοκιμάστε τις $\phi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \chi_{[k-1,k)}$ και αποδείξτε ότι είναι μη αρνητικές Lebesgue μετρήσιμες στο $[0,+\infty)$, ότι $\phi_n \le \phi_{n+1}$ και $\lim_{n\to+\infty} \phi_n = f$ στο $[0,+\infty)$.)

Πρόβλημα 4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα Lebesgue $\int_A f$ (αν υπάρχει) στις παρακάτω περιπτώσεις.

$$f(x) = x^2 \quad A = [0,1], \qquad f(x) = \frac{1}{x} \quad A = (0,1],$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad A = (0,1], \qquad f(x) = \frac{1}{x} \quad A = [1,+\infty),$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad A = [1,+\infty), \qquad f(x) = \frac{1}{x^3} \quad A = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Πρόβλημα 5. Έστω ανοικτό $U \subseteq \mathbb{R}^d$ και $f, g : U \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο U. Αν είναι $f = g$ L-σχεδόν παντού στο U, αποδείξτε ότι $f = g$ στο U.

(Υπόδειξη: Έστω $f(x_0) \neq g(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in U$. Παρατηρήστε ότι υπάρχει ανοικτή μπάλα $B(x_0;\delta) \subseteq U$ ώστε $\delta > 0$ και $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in B(x_0;\delta)$. Όμως, $m_d\big(B(x_0;\delta)\big) > 0$.)