Πανεπ. Κρητης, Τμημα Μαθηματικων, Πραγματικη Αναλυση, Ανοιξη 2009-10, Μιχ. Κολουντζακης

5ο φυλλάδιο προβλημάτων, 10 Μαρ. 2010

Πρόβλημα 1. Αν $U \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοιχτό σύνολο δείξτε ότι το U είναι ίσο με την ένωση όλων των ανοιχτών διαστημάτων που περιέχει και που έχουν ρητά άκρα.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω δείξτε ότι υπάρχουν κλειστά $F_n \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $U = \bigcup_n F_n$.

Πρόβλημα 2. Δώστε παράδειγμα μετρήσιμου υποσυνόλου του $[0,1]$ που να έχει μέτρο 1 αλλά να μην περιέχει διάστημα.

Δώστε παράδειγμα μετρήσιμου υποσυνόλου του $[0,1]$ όπως παραπάνω ώστε επιπλέον το συμπλήρωμά του στο $[0,1]$ να είναι υπεραριθμήσιμο.

Πρόβλημα 3. Ένα σύνολο λέγεται τύπου G_δ αν είναι αριθμήσιμη τομή ανοιχτών συνόλων. Δείξτε ότι για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}^d$ υπάρχει ένα G_δ σύνολο A που περιέχει το E και έχει το ίδιο εξωτερικό μέτρο με αυτό.

Αν το E είναι επιπλέον μετρήσιμο τότε για ένα τέτοιο σύνολο A ισχύει $m(A \setminus E) = 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι κάθε μετρήσιμο σύνολο μπορεί να γίνει G_δ αν του προσθέσουμε ένα κατάλληλο σύνολο μέτρου 0.

Πρόβλημα 4. Έστω ακολουθία μετρησίμων συνόλων A_n με $\sum_n m(A_n) < \infty$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$E = \{x : \text{ το } x \text{ ανήκει σε άπειρα από τα } A_n\}$$

έχει μέτρο 0.

Ισχύει το αντίστροφο;

Πρόβλημα 5. Αν $E \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι συμπαγές και O_n είναι το ανοιχτό σύνολο που απαρτίζεται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}^d$ για τα οποία $d(x, E) < 1/n$ δείξτε ότι $m(O_n) \to m(E)$.

Επίσης δείξτε ότι αυτό δεν ισχύει αν το E είναι απλά κλειστό.