4ο φυλλάδιο προβλημάτων, 3 Μαρ. 2010

Πρόβλημα 1. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ σύνολο με θετικό εξωτερικό μέτρο. Δείξτε ότι υπάρχει μη κενό διάστημα $I = (a, b)$ τέτοιο ώστε
$$m_1^*(E \cap I) \geq 0.999(b - a).$$

Υπόδειξη: Υποθέστε ότι δε συμβαίνει αυτό για κανένα διάστημα και πάρτε μια κάλυψη του E με διαστήματα που το συνολικό τους μήκος προσεγγίζει το εξωτερικό μέτρο του E.

Πρόβλημα 2. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με πεπερασμένο εξωτερικό μέτρο και $f(x) = m_1^*(E \cap (-\infty, x))$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 3. Αν $\Sigma_i \subseteq \mathcal{P}(X)$, $i \in I$, είναι μια οικογένεια από σ-άλγεβρες υποσυνόλων του συνόλου X δείξτε ότι η τομή τους
$$\Sigma = \bigcap_{i \in I} \Sigma_i$$
είναι επίσης σ-άλγεβρα (αυτό ισχύει για οποιοδήποτε σύνολο δεικτών I).

Χρησιμοποιώντας αυτό δείξτε ότι για κάθε υποσύνολο $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ υπάρχει μια 'ελάχιστη' σ-άλγεβρα Σ υποσυνόλων του X που περιέχει όλα τα στοιχεία του S. Αυτό σημαίνει ότι αν Σ' είναι μια οποιαδήποτε σ-άλγεβρα που περιέχει τα στοιχεία του S τότε αναγκαστικά $\Sigma \subseteq \Sigma'$.

Αυτή η σ-άλγεβρα ονομάζεται η σ-άλγεβρα που παράγουν τα στοιχεία του S.

Πρόβλημα 4. Δείξτε ότι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων ενός συνόλου X είναι είτε πεπερασμένη είτε υπεραριθμήσιμη.

Πρόβλημα 5. Έστω $A_n \subseteq X$ μια ακολουθία υποσυνόλων του X. Ορίζουμε
$$\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{l=k}^{\infty} A_l, \quad \text{και} \quad \limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=k}^{\infty} A_l.$$
Περιγράψτε με λόγια τα δύο αυτά σύνολα. Ποιο από τα δύο περιέχεται πάντα μέσα στο άλλο;