

Πρόβλημα 1. Στο \mathbb{R} ορίζουμε την εξής σχέση ανάμεσα σε δύο στοιχεία του:

$$x \sim y \text{ αν και μόνο αν } x - y \in \mathbb{Z}.$$

Δείξτε ότι η \sim είναι σχέση ισοδυναμίας.

Περιγράψτε ένα σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ το οποίο να περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας.

Πρόβλημα 2. Στο \mathbb{R} ορίζουμε την εξής σχέση ανάμεσα σε δύο στοιχεία του:

$$x \sim y \text{ αν και μόνο αν } x - y \in \mathbb{Q}.$$

Δείξτε ότι η \sim είναι σχέση ισοδυναμίας. Δείξτε επίσης ότι αν A και B είναι δύο κλάσεις ισοδυναμίας τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τ.ώ. $A = B + x = \{b + x : b \in B\}$. Είναι το x μοναδικό για κάθε δύο κλάσεις A και B ; Δείξτε ότι κάθε κλάση είναι αριθμήσιμο σύνολο και ότι το πλήθος των κλάσεων είναι υπεραριθμήσιμο.

Πρόβλημα 3. Με τον παρακάτω συλλογισμό αποδεικνύεται ότι είναι $m_d^*(E) = 0$ για κάθε $E \subseteq \mathbf{R}^d$. Χρησιμοποιούμε την σ -υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου Lebesgue. Ποιο είναι το λάθος;

$$0 \leq m_d^*(E) = m_d^*\left(\bigcup_{x \in E} \{x\}\right) \leq \sum_{x \in E} m_d^*(\{x\}) = \sum_{x \in E} 0 = 0.$$

Πρόβλημα 4. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$ με $m_d^*(E) < \infty$ και $\epsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει ανοιχτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^d$ τ.ώ. $E \subseteq U$ και $m_d^*(U) \leq m_d^*(E) + \epsilon$.

Πρόβλημα 5. Αλλάζουμε την κατασκευή τους συνόλου Cantor ώστε σε κάθε βήμα να πετάμε το μεσαίο κλειστό διάστημα. Ποια η σχέση του συνόλου που προκύπτει τώρα με το σύνολο Cantor; Π.χ. είναι μη κενό;

Πρόβλημα 6. Έστω A το σύνολο των $x \in [0, 1]$ από τη δεκαδική παράσταση των οποίων λείπει τελείως ένα συγκεκριμένο δεκαδικό ψηφίο – το 6 για παράδειγμα. Ακολουθήστε την επαγωγική διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor, χωρίζοντας κάθε φορά σε δέκα (αντί τρία) υποδιαστήματα, για να απεικονίσετε το σύνολο A στην πραγματική ευθεία και για να γράψετε το A ως $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$, όπου τα F_n είναι συγκεκριμένα κλειστά σύνολα. Τέλος, αποδείξτε ότι

- (i) το A είναι κλειστό σύνολο και δεν περιέχει ανοικτά διαστήματα,
- (ii) το A είναι υπεραριθμήσιμο και
- (iii) $m_1^*(A) = 0$.