2ο φυλλάδιο προβλημάτων, 17 Φεβ. 2010

Πρόβλημα 1. Δείξτε ότι αν το σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι φραγμένο τότε το εξωτερικό του μέτρο είναι πεπερασμένο.

Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι δεν είναι σωστό ότι μη φραγμένα σύνολα έχουν άπειρο μέτρο ακόμη κι αν το σύνολο αυτό είναι μια ένωση διαστημάτων στο $\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2. Αποδείξτε ότι το σύνορο ενός τετραγώνου (το σύνολο δηλ. που απαρτίζεται μόνο από τις πλευρές του, χωρίς το εσωτερικό του) στο $\mathbb{R}^2$ έχει μέτρο 0.

Ποιο το εξωτερικό μέτρο του συνόρου των ρητών στο $\mathbb{R}$; Θυμίζουμε ότι το σύνορο ενός συνόλου A είναι εκείνα τα σημεία (εντός ή εκτός του A) που μπορούν να προσεγγισθούν και από μια ακολουθία σημείων του A και από μια ακολουθία σημείων του συμπληρώματος A^c.

Πρόβλημα 3. Έστω $A \subseteq [1, +\infty), B \subseteq (-\infty, 0]$. Δείξτε ότι $m_1^*(A \cup B) = m_1^*(A) + m_1^*(B)$.

Υπόδειξη: Λόγω της υποπροσθετικότητας αρκεί να δείξετε την ανισότητα $m_1^*(A \cup B) \geq m_1^*(A) + m_1^*(B)$. Θεωρείστε μια κάλυψη του $A \cup B$ και φτιάξτε από αυτή δύο καλύψεις των A και B.

Πρόβλημα 4. Έστω $K, L \subseteq \mathbb{R}^d$ δύο ξένα συμπαγή σύνολα. Δείξτε ότι η μεταξύ τους απόσταση $d(K, L)$ είναι > 0, όπου

$$d(K, L) = \inf \{|x - y| : x \in K, y \in L\}$$

και $|\cdot|$ συμβολίζει την Ευκλείδια απόσταση από το 0.

Υπόδειξη: Το infimum ενός συνόλου μπορεί να προσεγγιστεί από τα στοιχεία του συνόλου. Υπάρχουν συνεπώς ακολουθίες $x_n \in K, y_n \in L$ τέτοιες ώστε $d(x_n, y_n) \to d(K, L)$.

Πρόβλημα 5. Ένας πραγματικός αριθμός λέγεται *αλγεβρικός* αν υπάρχει ένα πολυώνυμο **με ακέραιους συντελεστές** του οποίου είναι ρίζα (π.χ. ο $\sqrt{2}$ είναι αλγεβρικός αριθμός μια και ικανοποιεί το πολυώνυμο $x^2 - 2$). Δείξτε ότι το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι το σύνολο των πολυωνύμων με ακεραίους συντελεστές είναι αριθμήσιμο.