Πανεπ. Κρητης, Τμημα Μαθηματικων, Πραγματικη Αναλυση, Ανοιξη 2009-10, Μιχ. Κολουντζακης

1ο φυλλάδιο προβλημάτων, 10 Φεβ. 2010

Πρόβλημα 1. Έστω A, B δύο αριθμήσιμα σύνολα. Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία του κάθε συνόλου μπορούν να απαριθμηθούν σα μια ακολουθία. Ένας άλλος τρόπος να ορίσουμε ότι το σύνολο A είναι αριθμήσιμο είναι αν πούμε ότι υπάρχει μια απεικόνιση $\phi : \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \to A$ που είναι επί.

Δείξτε ότι το σύνολο $A \times B$ (καρτεσιανό γινόμενο) είναι επίσης αριθμήσιμο. Το ίδιο και για το σύνολο $A \cup B$.

Πρόβλημα 2. Δείξτε κατ' ευθείαν από τον ορισμό του συμπαγούς συνόλου με ανοιχτές καλύψεις σε ένα μετρικό χώρο (X, d) ότι κάθε συμπαγές είναι αναγκαστικά φραγμένο, περιέχεται δηλ. μέσα σε κάποια μπάλα

$$B(x_0; R) = \{x \in X : \ d(x_0, x) < R\}, \quad \text{για κάποια } x_0 \in X, R > 0.$$

Πρόβλημα 3. Έστω διαστήματα $I, I_1, I_2, \ldots, I_N \subseteq \mathbb{R}$ τ.ώ. κάθε σημείο του I ανήκει τουλάχιστον σε δύο από τα $I_1, I_2, \ldots, I_N$. Δείξτε τότε ότι

$$2V_1(I) \le V_1(I_1) + \cdots + V_1(I_N).$$

Υπόδειξη: Αν $J \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, τότε $V_1(J) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_J(t)\, dt$, όπου χ_J η χαρακτηριστική συνάρτηση του J.

Πρόβλημα 4. Αν είναι $B(x_1; R_1), B(x_2; R_2)$, με $R_1 \le R_2$, δύο κλειστές μπάλες (δίσκοι) στο $\mathbb{R}^2$ (με κέντρα τα x_i και ακτίνες τις R_i, $i = 1, 2$) οι οποίες τέμνονται τότε

$$B(x_1; R_1) \subseteq B(x_2; 3R_2).$$

Διατυπώστε και αποδείξτε ένα αντίστοιχο θεώρημα για δύο τετράγωνα στο επίπεδο με τις πλευρές τους παράλληλες με τους άξονες.

Δείξτε επίσης ότι δεν ισχύει κάτι παρόμοιο αν το μόνο που γνωρίζουμε για τα δύο σχήματα είναι ότι είναι δύο ορθογώνια με τις πλευρές τους παράλληλες με τους άξονες (διαστήματα).

Πρόβλημα 5. *Συμβολισμός:* Αν $E \subseteq \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$ γράφουμε $E + x = \{x + e : e \in E\}$ για τη μεταφορά του E κατά x. Αν A είναι ένα πεπερασμένο σύνολο με $|A|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του. Αν το A δεν είναι πεπερασμένο τότε $|A| = +\infty$.

Έστω $A, B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Δείξτε ότι υπάρχει ακέραιος x τ.ώ.

$$|A \cap (B + x)| \ge \frac{|A| \cdot |B|}{2n - 1}.$$

Υπόδειξη: Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{x=-(n-1)}^{n-1} |A \cap (B + x)|$.