Διάρκεια διαγωνίσματος 3 ώρες. Κλειστές όλες οι σημειώσεις.

Τελικό διαγώνισμα, 16 Ιουνίου 2010

Πρόβλημα 1. Ένας πραγματικός αριθμός λέγεται *αλγεβρικός* αν είναι ρίζα κάποιου πολυωνύμου με ακεραίους συντελεστές. Δείξτε ότι το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

Υπόδειξη: Ένα πολυώνυμο βαθμού n έχει το πολύ n ρίζες.

Πρόβλημα 2. Ορίστε το $\operatorname{ess\,sup} f$ μιας συνάρτησης f. Αν

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ x & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$$

βρείτε το $\operatorname{ess\,sup} f$.

Πρόβλημα 3. Έστω ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to [0,\infty)$ και ακολουθία αριθμών $a_n \ge 0$ για τα οποία ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \text{ και } \int_{[0,1]} f_n \le 1.$$

Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε τιμή του $x \in [0,1]$.

Πρόβλημα 4. Έστω $f : \mathbb{R} \to [1,\infty)$ τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}} \log f < \infty$. Δείξτε ότι

$$\int_2^{\infty} \frac{m\{f > t\}}{t \log t} dt < \infty.$$

Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα ένα κατάλληλο άνω φράγμα για την ποσότητα $m\{f > t\}$.

Πρόβλημα 5. Διατυπώστε τις ανισότητες Hölder και Minkowski και δείξτε πώς προκύπτει η δεύτερη από την πρώτη.

Υπόδειξη: Για $1 \le p < \infty$ έχουμε $|f+g|^p \le |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}$.