Μερικά απλά πράγματα για αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα

Μιχάλης Κολουντζάκης, Τμ. Μαθηματικών, Πανεπ. Κρήτης, Φεβ. 2009

Ορισμός 1. Ένα σύνολο A λέγεται αριθμήσιμο αν μπορούμε να γράψουμε τα στοιχεία του το ένα μετά το άλλο, σε μια ακολουθία
$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}.$$
Ο αυστηρός ορισμός: αν υπάρχει συνάρτηση $\mathbb{N} \to A$ που να είναι επί.

Αν ένα σύνολο δεν είναι αριθμήσιμο το λέμε υπεραριθμήσιμο.

Παρατήρηση. Δεν απαιτούμε στην ακολουθία a_n κάθε στοιχείο του A να εμφανίζεται ακριβώς μία φορά αλλά τουλάχιστον μία (η έννοια του αριθμησίμου συνόλου όμως δε θα άλλαζε κι αν ακόμα στον ορισμό το απαιτούσαμε αυτό).

Παραδείγματα

(1) Κάθε πεπερασμένο σύνολο.
(2) Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών.
(3) $\{5, 6, 7, \ldots\}$ (οι φυσικοί ≥ 5).
(4) $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ (οι άρτιοι φυσικοί).
(5) Οι ακέραιοι $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
Απόδειξη: Ιδού τα στοιχεία του $\mathbb{Z}$ ως μια ακολουθία: $a_1 = 0, a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 2, a_3 = -2, \ldots$.

Παρατήρηση. Αν $A \subseteq B$ και B αριθμήσιμο τότε και το A είναι αριθμήσιμο.
Απόδειξη: Από την ακολουθία στοιχείων του B παραλείπουμε τα στοιχεία του $B \setminus A$.

Παρατήρηση. Αν $A_1, A_2, \ldots, A_k$ είναι αριθμήσιμα σύνολα τότε και η ένωσή τους $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ είναι: να ένας τρόπος να απαγγείλετε όλα τα στοιχεία του A: το 1ο στοιχείο του A_1, το 1ο στοιχείο του A_2, ... , το 1ο στοιχείο του A_k, το 2ο στοιχείο του A_1, ..., το 2ο στοιχείο του A_k, το 3ο στοιχείο του A_1, κλπ.

Πρόταση 1. *Αν $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ (άπειρη ακολουθία συνόλων) είναι αριθμήσιμα σύνολα τότε είναι και η ένωσή τους $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.*

Απόδειξη. Απαγγείλετε πρώτα το 1ο στοιχείο του A_1, μετά τα δύο πρώτα στοιχεία των A_1, A_2, μετά τα τρία πρώτα στοιχεία των A_1, A_2, A_3 κ.ο.κ. Παρατηρείστε ότι κάθε στοιχείο του A κάποια στιγμή θα το αναφέρετε. Μάλιστα κάθε στοιχείο του A θα αναφερθεί τελικά άπειρες φορές (απόδειξη;) αλλά αυτό δε μας πειράζει.
■

Πρόταση 2. *Αν $A_1, A_2, \ldots, A_k$ είναι αριθμήσιμα σύνολα τότε και το καρτεσιανό τους γινόμενο*
$$A = A_1 \times \cdots \times A_k = \{(x_1, \ldots, x_k) : \ x_j \in A_j\}$$
είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη. Επειδή
$$A_1 \times \cdots \times A_k = (A_1 \times \cdots \times A_{k-1}) \times A_k$$
αρκεί να δείξουμε το θέωρημα για $k = 2$. Παρατηρείστε ότι
$$A_1 \times A_2 = \bigcup_{a \in A_1} \{(a, b) : \ b \in A_2\},$$
και ότι αυτή είναι μια αριθμήσιμη ένωση (έχει τόσα σύνολα όσα και τα στοιχεία του A_1) από αριθμήσιμα σύνολα (αφού κάθε ένα από τα σύνολα που ενώνουμε έχει τόσα στοιχεία όσα και το A_2). Άρα από την προηγούμενη πρόταση έχουμε το ζητούμενο.
■

Παρατήρηση. Ενώσεις αριθμησίμων συνόλων των οποίων το πλήθος δεν είναι αριθμήσιμο ενδέχεται να μην είναι αριθμήσιμες. Θα δούμε αργότερα ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ δεν είναι αριθμήσιμο. Άρα η ένωση
$$\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$$

(ενώνουμε δηλ. τα μονσύνολα $\{x\}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$) είναι μια ένωση αριθμησίμων συνόλων (κάθε μονοσύνολο, ως πεπερασμένο, είναι αριθμήσιμο) που δεν είναι αριθμήσιμο σύνολο. Ο λόγος είναι ότι το πλήθος των συνόλων που συμμετέχουν στην ένωση αυτή δεν είναι αριθμήσιμο.

Πρόταση 3. *Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο. Ομοίως και το $\mathbb{Q}^n$ για $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\frac{k}{n} :\ k \in \mathbb{Z}\}$. Στην ένωση μετέχουν αριθμήσιμα το πλήθος σύνολα, και κάθε ένα από αυτά είναι ουσιαστικά το ίδιο με το $\mathbb{Z}$, άρα αριθμήσιμο. Καρτεσιανά γινόμενα πεπερασμένου πλήθους αριθμησίμων συνόλων είναι αριθμήσιμα, άρα και το $\mathbb{Q}^n$ είναι αριθμήσιμο όποιο και νά 'ναι το $n \in \mathbb{N}$.
■

Πρόταση 4. *(Παράδειγμα συνόλου που δεν είναι αριθμήσιμο.* **Διαγώνιο επιχείρημα.***) Το δυναμοσύνολο (σύνολο όλων των υποσυνόλων) του $\mathbb{N}$ δεν είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Αν ήταν θα μπορούσαμε να αραδιάσουμε όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ σε μια ακολουθία συνόλων

$$A_1, A_2, \ldots.$$

Κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}$ συνεπώς είναι κάποιο από τα A_j. Ορίζουμε τώρα το εξής υποσύνολο B του $\mathbb{N}$: βάζουμε τον αριθμό j στο B αν και μόνο αν $j \notin A_j$. Ας πούμε τώρα ότι $B = A_k$ για κάποιο φυσικό k. Τότε αν $k \in B$ έπεται ότι $k \notin A_k = B$, άτοπο. Αλλά ομοίως αν $k \notin B$ έπεται ότι $k \in A_k = B$, και πάλι άτοπο.
■

Πρόταση 5. *Το σύνολο όλων των ακολουθιών a_n, $n = 1, 2, \ldots$, με στοιχεία 0 ή 1 δεν είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Το σύνολο αυτό είναι ουσιαστικά το δυναμοσύνολο του $\mathbb{N}$: σε κάθε ακολουθία a_n όπως παραπάνω αντιστοιχούμε το σύνολο

$$A = \{n \in \mathbb{N} : a_n = 1\}.$$

■

Παρατήρηση. Αντίθετα, το **σύνολο των πεπερασμένων υποσυνόλων** του $\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο. Αυτό γιατί είναι η αριθμήσιμη ένωση των συνόλων με κανένα στοιχείο (μόνο το κενό), των συνόλων με ένα στοιχείο, με δύο στοιχεία κλπ. Το σύνολο όλων των k-μελών υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο γιατί είναι ουσιαστικά υποσύνολο του $\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^k$ (για να βρούμε ποια k-άδα αντιστοιχεί στο k-μελές σύνολο A, διατάσσουμε τα στοιχεία του κατ΄ αύξουσα σειρά και τα γράφουμε ως διατεταγμένη k-άδα).

Πρόταση 6. *Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι κάποιο υποσύνολό του δεν είναι αριθμήσιμο. Πάρτε το διάστημα $(0, 1)$ και γράψτε κάθε αριθμό στο δεκαδικό του ανάπτυγμα $x = 0.x_1x_2x_3\cdots$ με $x_j \in \{0, \ldots, 9\}$. Κάποιοι αριθμοί έχουν παραπάνω από ένα (δηλ. δύο) αναπτύγματα (π.χ. $0.200\cdots = 0.1999\cdots$). Αυτοί είναι ακριβώς οι αριθμοί που έχουν πεπερασμένο δεκαδικό ανάπτυγμα και είναι άρα όλοι τους ρητοί. Ας πάρουμε λοιπόν το σύνολο A ως εκείνα τα στοιχεία του $(0, 1)$ που γράφονται μόνο με ένα τρόπο στο δεκαδικό σύστημα. Επίσης παρατηρείστε ότι κάθε ακολουθία $0.x_1x_2\cdots$ με $x_j \in \{0, \ldots, 9\}$ παριστάνει ένα μοναδικό στοιχείο του $(0, 1)$.

Έχουμε έτσι αντιστοιχίσει κατά 1-1 τρόπο το σύνολο A σε κάποιο υποσύνολο του συνόλου όλων των δεκαδικών ακολουθιών. Το σύνολο που δεν καλύπτεται είναι αριθμήσιμο αφού αντιστοιχεί σε ρητούς αριθμούς. Το σύνολο όλων των ακολουθιών είναι υπεραριθμήσιμο (απόδειξη;) άρα και η εικόνα του A μέσω της αντιστοίχισης είναι υπαριρθμήσιμη και ομοίως είναι και το A άρα και το $\mathbb{R}$.
■