Πανεπιστημιο Κρητης, Τμ. Μαθηματικων, Σεμιναριο Προβληματων, Φθινοπωρο 2013-14, Μιχ. Κολουντζακης

Δεύτερη Ομάδα Ασκήσεων, 6 Νοεμβρίου 2013

Πρόβλημα 1. Μετά το τέλος ενός πρωτοποριακού δημόσιου έργου διαπιστώνεται ότι ναι μεν ο εργολάβος είχε, όπως απαιτούνταν, περάσει 11 καλώδια από τη μια πλευρά ενός ποταμού στην άλλη (σκάβοντας ένα μικρό τούνελ κάτω από την κοίτη) αλλά δεν είχε κρατήσει λογαριασμό ποιο από τα άκρα στην πλευρά A αντιστοιχούσε σε ποιο στην πλευρά B. Δεν απαιτούνταν άλλωστε ρητά από τη μελέτη και τη σύμβαση.

Έτσι, ο άτυχος ηλεκτρολόγος που ανέλαβε μετά να χρησιμοποιήσει τα καλώδια βρίσκεται αντιμέτωπος με ονομασίες των άκρων A1 έως A11 και B1 έως B11 που είναι τελείως αυθαίρετες. Πρώτο πράγμα που πρέπει λοιπόν να κάνει είναι να βρει ποιο από το A άκρα αντιστοιχεί σε ποιο B άκρο.

Για να το πετύχει αυτό δύο πράγματα μπορεί να κάνει (δουλεύει μόνος του):

- να δένει μεταξύ τους κάποια άκρα (βραχυκυκλώνοντάς τα) και
- να ελέγχει με ένα λαμπάκι και μια μπαταρία αν δύο άκρα είναι μεταξύ τους βραχυκυκλωμένα.

Το να περάσει ο ηλεκτρολόγος το ποτάμι, που δεν έχει γέφυρα, είναι δύσκολη και ακριβή υπόθεση. Ο μοναδικός βαρκάρης που υπάρχει για να τον περάσει απέναντι ζητάει πολλά και δε μπορεί να του κόψει και απόδειξη ώστε να πληρωθεί τα έξοδα ο ηλεκτρολόγος από τον εργοδότη του (το Δημόσιο). Έτσι πρέπει να ξεκαθαρίσει το ποιο άκρο συνδέεται με ποιο κάνοντας τα λιγότερα δυνατά περάσματα του ποταμού.

Δείξτε ότι μπορεί να λύσει το πρόβλημά του με ένα μόνο πέρασμα, μετ΄ επιστροφής.

Πρόβλημα 2. Σ'ένα μικροβιολογικό εργαστήριο έχουν 100 φιάλες αίματος από διαφορετικά άτομα και γνωρίζουν ότι ακριβώς μια από αυτές περιέχει αίμα μολυσμένο με μια ουσία A. Ο έλεγχος για το αν ένα δείγμα αίματος περιέχει την ουσία A είναι πολύ ακριβός και το εργαστήριο θέλει να ελαχιστοποιήσει τον αριθμό δειγμάτων που θα ελέγξει για να βρει τη μολυσμένη φιάλη.

Γι' αυτό το λόγο το εργαστήριο δημιουργεί N μίγματα από τα 100 μπουκάλια που θέλει να ελέγξει και στέλνει αυτά τα N δείγματα σε ένα εργαστήριο στην Αμερική το οποίο στέλνει πίσω τις απαντήσεις. (Τα ταχυδρομικά είναι επίσης πανάκριβα, οπότε το εργαστήριο στέλνει και τα N μίγματα με μια αποστολή.)

Αν κάποιο από αυτά τα μίγματα προκύψει θετικό αυτό σημαίνει ότι κάποιο από τα μπουκάλια που χρησιμοποιήθηκαν στο μίγμα αυτό είναι μολυσμένο.

Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός μιγμάτων N που πρέπει να στείλει το εργαστήριο για να βρει τη μολυσμένη φιάλη;

Πρόβλημα 3. Στο πάτωμα βρίσκεται ένα σφαιρικό τόπι, που εφάπτεται στο σημείο A του πατώματος. Παίρνετε αυτό το τόπι και παίζετε για λίγη ώρα. Αφού τελειώσετε το παιχνίδι αφήνετε ξανά το τόπι στο πάτωμα ώστε να ακουμπάει πάλι στο σημείο A.

Ο προσανατολισμός του κατά τα άλλα μπορεί να είναι τυχαίος.

Δείξτε ότι υπάρχει κάποιο σημείο πάνω στο τόπι που βρίσκεται στις ίδιες 3-διάστατες συντεταγμένες που βρισκόταν και πριν πάρετε το τόπι για να παίξετε.

Πρόβλημα 4. Στην παρακάτω εικόνα βλέπετε ένα συνηθισμένο τύπο puzzle. Στο κενό τετραγωνάκι μπορεί κάθε φορά να μετακινηθεί ένα οποιοδήποτε από τα γειτονικά του τετράγωνα.

Δείξτε ότι είναι αδύνατο, ξεκινώντας από την κατάσταση που βλέπετε στην εικόνα, να φτάσετε μετά από κάποιες κινήσεις στην ίδια κατάσταση εκτός από τα τετράγωνα με αριθμούς 1 και 2 που θα είναι μεταξύ τους αλλαγμένα.

Πρόβλημα 5. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε γρήγορα τη δύναμη K^n ενός φυσικού αριθμού K (όπου ο εκθέτης n είναι ένας πολύ μεγάλος αριθμός) τότε δε χρειάζεται να κάνουμε n πολλαπλασιασμούς. Αρκούν $O(\log n)$ αριθμητικές πράξεις (πάντα μεταξύ ακεραίων): η πιο απλή περίπτωση όπου αυτό φαίνεται είναι όταν $n = 2^r$ είναι δύναμη του 2. Τετραγωνίζοντας κάθε φορά το προηγούμενό μας αποτέλεσμα μπορούμε με $r = O(\log n)$ πράξεις να πάρουμε το αποτέλεσμά μας.

Βρείτε ένα αντίστοιχα γρήγορο τρόπο υπολογισμού του n-οστού αριθμού Fibonacci F_n. Οι αριθμοί αυτοί ορίζονται από τον αναδρομικό τύπο:

$$F_n = \begin{cases} 1 & (n = 1, 2) \\ F_{n-1} + F_{n-2} & (n \geq 3). \end{cases}$$

Μόνο πράξεις ανάμεσα σε ακεραίους είναι επιτρεπτές.

Πρόβλημα 6. Αν είναι A ένας $k \times k$ πραγματικός πίνακας και i, j δύο ακέραιοι από 1 έως και k, και ορίσουμε την ακολουθία $x_n = (A^n)_{i,j}$ (το i, j στοιχείο της n-οστής δύναμης του A) δείξτε ότι η ακολουθία x_n ικανοποιεί μια γραμμική αναδρομική σχέση:

$$x_n = c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r}$$

όπου r είναι φυσικός αριθμός και $c_1, \ldots, c_r$ πραγματικοί αριθμοί.

Πρόβλημα 7. Έστω k ένας φυσικός αριθμός και μια λογική έκφραση

$$C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$$

όπου κάθε ένα από τα C_i, $i = 1, \ldots, n$, είναι της μορφής

$$y_1 \vee \cdots \vee y_k$$

όπου κάθε y_j είναι είτε x_ν είτε $\overline{x_\nu}$. Τα x_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, είναι λογικές μεταβλητές, είναι δηλ. είτε αληθείς είτε ψευδείς.

Παράδειγμα μιας τέτοιας έκφρασης με $k = 3$ είναι η

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3 \vee x_4).$$

Αν $n < 2^k$ δείξτε ότι η λογική έκφραση είναι ικανοποιήσιμη, μπορούμε δηλ. να αναθέσουμε τιμές (αληθής ή ψευδής) σε κάθε μια από τις λογικές μεταβλητές x_ν ώστε κάθε ένα από τα C_j να είναι αληθές.

Πρόβλημα 8. Ένας τρόπος να περιγράψει κανείς ένα σύνολο σημείων $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι μέσω κάποιων πολυωνυμικών εξισώσεων που το ορίζουν:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = 0, \forall i = 1, 2, \ldots, k\}$$

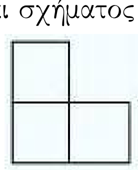
όπου τα $f_i(x)$ είναι κάποια πολυώνυμα ως προς τις μεταβλητές $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Για παράδειγμα το παρακάτω πολυωνυμικό σύστημα στο $\mathbb{R}^3$ περιγράφει κάποιο κύκλο στο χώρο:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \; x + y + z = 0.$$

Φυσικά δεν περιγράφονται όλα τα σύνολα με αυτό τον τρόπο.

Δείξτε ότι αν τα σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ περιγράφονται με αυτό τον τρόπο (είναι δηλ. το καθένα από αυτά το σύνολο λύσεων κάποιου συστήματος πολυωνυμικών εξισώσεων) τότε και η ένωση $A \cup B$ περιγράφεται κατ' αυτό τον τρόπο. (Είναι πολύ ευκολότερο να δείτε ότι η τομή $A \cap B$ περιγράφεται από κάποιο πολυωνυμικό σύστημα.)

Πρόβλημα 9. Δείξτε ότι με ένα πλακάκι σχήματος L



μπορείτε να πλακοστρώσετε ένα δωμάτιο $2^n \times 2^n$ το οποίο έχει μέσα μια 1×1 κολώνα (το πλάτος του κάθε τετραγώνου στο πλακάκι είναι 1, και η κολώνα βρίσκεται σε κάποια ακέραια θέση στο δωμάτιο με κάτω αριστερά γωνία (i, j), $i, j \in \mathbb{Z}$).