Δεσμευμένη διασπορά

$$\sigma^2(X|Y) = Var(X|Y)$$

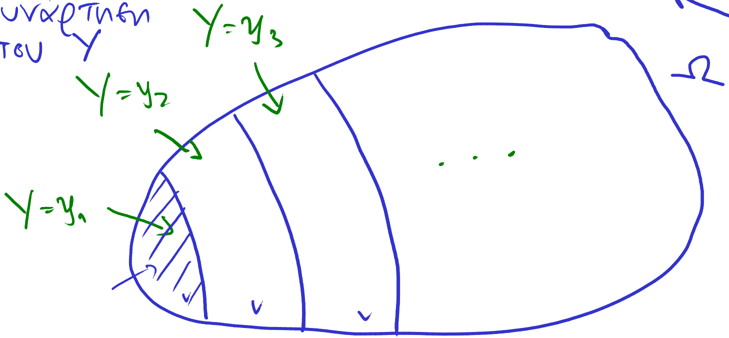
τυχαίο πλήθος

Ποια η διασπορά του $S = \sum_{j=1}^{N} X_j$;

$$\boxed{\sigma^2(X|Y)} = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X|Y)\right)^2 \,\middle|\, Y\right]$$

ανάλογος $\sigma^2(X) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}X\right)^2\right]$

συνάρτηση του Y



$\sigma^2(X|Y) =$ ποια η διασπορά του X αν γνωρίζουμε την τιμή του Y

$\sigma^2(X|Y=y_1)$

Τύπος ολικής διασποράς

$$\sigma^2(X) = \sigma^2(\mathbb{E}(X|Y)) + \mathbb{E}[\sigma^2(X|Y)]$$

[συνολική] (από φέτα σε φέτα) + (μέση διακύμανση)

εσωτερικά στις φέτες

$$X = \overbrace{\mathbb{E}(X|Y)}^{A} + \overbrace{(X - \mathbb{E}(X|Y))}^{B}$$

- $\mathbb{E}A = \mathbb{E}X$ από τον κανόνα $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}X$

ίσα

- $\mathbb{E}(B|Y) = \mathbb{E}(X|Y) - \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Y)|Y] = 0$
- $\mathbb{E}B = \mathbb{E}(\mathbb{E}(B|Y)) = \mathbb{E}0 = 0$ → B κεντραρισμένη
- $\mathbb{E}A\cdot B = 0$ (ορθογώνιες ΤΜ)

$$\mathbb{E}(A\cdot B) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(AB|Y)) = \mathbb{E}[A\,\overbrace{\mathbb{E}(B|Y)}^{0}] = 0$$

- $\mathrm{Cov}(A,B) = \mathbb{E}[(A-\mathbb{E}A)\cdot B] = \cancel{\mathbb{E}(AB)}^{=0} - \mathbb{E}(\mathbb{E}A\cdot B) = -\mathbb{E}A\cdot \underbrace{\mathbb{E}B}_{0} = 0$

Τύπος ολικής διασποράς

$$X = A + B \qquad A = \mathbb{E}(X|Y) \qquad B = X - \mathbb{E}(X|Y)$$

$$Cov(A,B) = 0$$

$$\sigma^2(B) = \mathbb{E}B^2$$

$$\Rightarrow \quad \sigma^2(X) = \sigma^2(A) + \sigma^2(B) = \sigma^2\big(\mathbb{E}(X|Y)\big) + \mathbb{E}(B^2)$$

$$= \sigma^2\big(\mathbb{E}(X|Y)\big) + \mathbb{E}\big[\mathbb{E}(B^2|Y)\big]$$

$$= \sigma^2\big(\mathbb{E}(X|Y)\big) + \mathbb{E}\big(\sigma^2(X|Y)\big)$$

$$\boxed{\sigma^2(X|Y) = \mathbb{E}\left[\big(X - \mathbb{E}(X|Y)\big)^2 \,\middle|\, Y\right]}$$

ορισμός δεσμ. διασποράς

$$\sigma^2(X) = \sigma^2\big(\mathbb{E}(X|Y)\big) + \mathbb{E}\,\sigma^2(X|Y)$$

Διασπορά αθροίσματος με τυχαίο πλήθος όρων

$S = \sum_{j=1}^{N} X_j$ όπου $N, X_1, X_2, \dots$ ανεξ. και X_j ισόνομες $\Longrightarrow$

$$\sigma^2(S) = (\mathbb{E}X_1)^2 \sigma^2(N) + \sigma^2(X_1)\,\mathbb{E}N$$

αφελής προσέγγιση

$$\sigma^2(X_j) = \sigma^2(X_1)$$

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}N \cdot \mathbb{E}X_1$$

$$\sigma^2(S) = \sigma^2(\mathbb{E}(S \mid N)) + \mathbb{E}(\sigma^2(S \mid N))$$

$$= \sigma^2(N \cdot \mathbb{E}X_1) + \mathbb{E}(N\,\sigma^2(X_1))$$

$$= (\mathbb{E}X_1)^2 \sigma^2(N) + \sigma^2(X_1)\,\mathbb{E}N$$