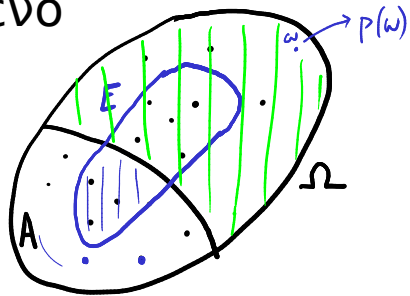


Δέσμευση μιας ΤΜ ως προς ενδεχόμενο

$$P(E|A) = \frac{P(A \cap E)}{P(A)}$$

$P(A) > 0$

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$$



... | A πληροφορία ού A ισχύει

Καινούριος δειγμ. χώρος: A

$$a \in A \quad \tilde{P}(a) = ;$$

$$\tilde{P}(a) = \frac{P(a)}{P(A)}$$

αν $a \in A$, αλλιώς 0

$$\sum_{a \in A} P(a) < 1$$

"
P(A)

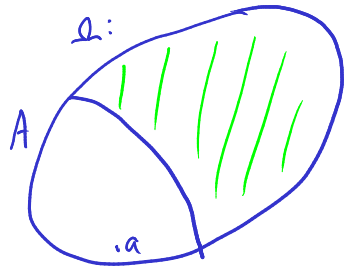
$$P(E|A) = \sum_{e \in E} \tilde{P}(e) = \sum_{e \in E \cap A} \tilde{P}(e) = \frac{\sum_{e \in E \cap A} P(e)}{P(A)} = \frac{P(E \cap A)}{P(A)}$$

Δέσμευση μιας ΤΜ ως προς ενδεχόμενο

$X | A$

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{P}(A) > 0$$



$$X|A: A \rightarrow \mathbb{Z}$$

ο περιορισμός της X στο A

$$\tilde{\mathbb{P}}(a) = \frac{\mathbb{P}(a)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$f_{X|A}(n) = \mathbb{P}(X=n | A) = \frac{\mathbb{P}(X=n, A)}{\mathbb{P}(A)}$$

Παράδειγμα δέσμευσης ΤΜ ως προς ενδεχόμενο

$X =$ αποτέλεσμα ενός ζαριού, $X \in \{1, 2, \dots, 6\}$

ενδεχόμενο $A =$ ζάρι φέρνει άρτιο



$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$A:$ \uparrow \uparrow \uparrow

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(X=2 | A) = \frac{1}{3}$$

"

$$f_{X|A}(2)$$

$$E X = 3.5 = \frac{7}{2}$$

$$E(X | A) = \sum_n n P(X=n | A) = 2 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3} = 4$$

Δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}(X | Y) = \varphi(Y)$

$X \rightarrow \mathbb{E}(X|Y)$

$Y=y$

είναι ΤΜ, συνάρτηση του Y

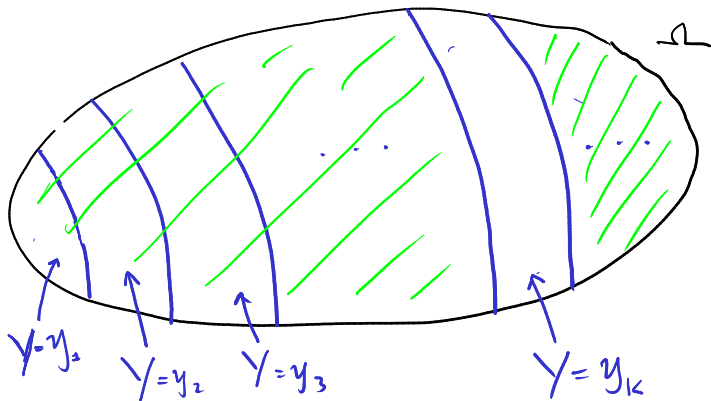
$$\mathbb{E}(X | Y=y_k)$$

$$= \sum_n n P(X=n | Y=y_k) = \varphi(y_k)$$

ορισμός

$X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$

$Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots\}$



Η ΤΜ

$\mathbb{E}(X|Y)$

σταθερή σε
κάθε $\{Y=y_k\}$

Παράδειγμα

X:



Y:



$$Z = X + Y$$

$$\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}X = \underline{\underline{3.5}}$$

$$3 = 1+2 = 2+1$$

σταθερή

$$\mathbb{E}(Z|X) = \mathbb{E}(X+Y|X) = \underbrace{\mathbb{E}(X|X)}_X + \underbrace{\mathbb{E}(Y|X)}_{\mathbb{E}Y} = X + 3.5$$

$$\mathbb{E}(X|Z) =$$

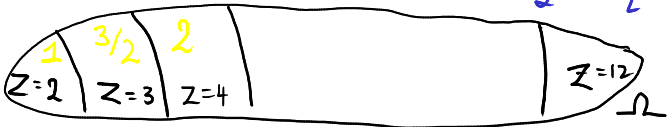
$$f_{X|Z=2}^{(n)} = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X|Z=2) = 1 \cdot 1 = 1 \checkmark$$

$$f_{X|Z=4}^{(n)} = \begin{cases} 1/3 & n=1 \\ 1/3 & n=2 \\ 1/3 & n=3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X|Z=4) = 2$$

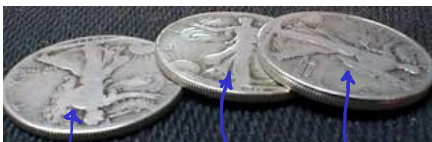
$$\mathbb{E}(X|Z=3) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \checkmark$$



Παράδειγμα

$$p \Rightarrow X \sim \text{Γεωμ}(p) \Rightarrow EX = \frac{1}{p}$$

πιθ. κορώνας είναι \mathbb{P} : \sim

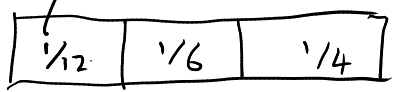


- Επιλέγουμε νόμισμα στην τύχη
- Ρίχνουμε μέχρι 1^η κορώνα
- $X =$ πότε η πρώτη κορώνα
 $X = 1, 2, \dots$

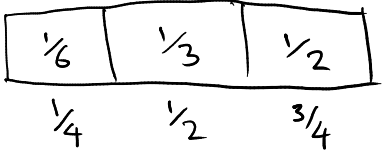
$$\underline{E(X | P)} =$$

$$\frac{1}{P} \quad \mathbb{P}(P = \frac{1}{4}, X = 1) = \underbrace{\mathbb{P}(X = 1 | P = \frac{1}{4})}_{\frac{1}{4}} \underbrace{\mathbb{P}(P = \frac{1}{4})}_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{12}$$

$$\underline{E(P | X)} =$$



α' άρρηκτα $\frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{6}{12}$



$X:$
 $= 1/2$
 $= \mathbb{P}(X=1)$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = 0.58333\dots$$

$\Omega:$

$X \geq 1$	0.58333	
$X = 2$		
$X = 3$		
\vdots	\vdots	\vdots

Συνέχεια παραδείγματος

$$\mathbb{E}(P | X=k) = \frac{1}{4} \frac{\alpha}{S} + \frac{1}{2} \frac{\beta}{S} + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{S} = \dots = \dots k \dots$$

$$\mathbb{E}(P | X) = k \leftarrow X$$

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{\alpha}{S}$	$\frac{\beta}{S}$	$\frac{\gamma}{S}$

$$\mathbb{P}(P=\frac{1}{4}, X=k) = \underbrace{\mathbb{P}(X=k | P=\frac{1}{4})}_{\frac{1}{3}} \mathbb{P}(P=\frac{1}{4}) = \frac{1}{12} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \alpha$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \quad \mathbb{P}(P=\frac{3}{4}, X=k) = \frac{1}{3} \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^k = \gamma$$

$$\mathbb{P}(P=\frac{1}{2}, X=k) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \beta \quad S = \alpha + \beta + \gamma$$