Πραγματικη Αναλυση– Φθινοπωρο 2021-22

Ενδιάμεσο Διαγώνισμα, Παρασκευή 19 Νοεμβρίου 2021

Διάρκεια 2 ώρες. Κλειστές όλες οι σημειώσεις.

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

1. Διατυπώστε τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου ενός συνόλου πραγματικών αριθμών. Έπειτα δείξτε, χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό αυτό, ότι το εξωτερικό μέτρο κάθε αριθμήσιμου συνόλου είναι 0.

2. Έστω Σ εκείνα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που είναι αριθμήσιμα ή τα συμπληρώματα τους είναι αριθμήσιμα. Δείξτε ότι το Σ είναι μια σ-άλγεβρα πάνω στο $\mathbb{R}$.

3. Ας είναι $E_n \subseteq \mathbb{R}$ μια ακολουθία μετρησίμων συνόλων με $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < \infty$. Ας είναι επίσης A το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών που ανήκουν σε άπειρα από τα E_n. Δείξτε ότι $m(A) = 0$.

4. Σωστό ή λάθος;
Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μη αρνητική και συνεχής παντού και $\int f < \infty$ τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μη αρνητική και μετρήσιμη και $\int f < \infty$ δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} f = \int f.$$

6. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μη αρνητική και μετρήσιμη και $\int f < \infty$ δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{f>n\}} f = 0.$$

7. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μη αρνητική και μετρήσιμη και $\int f < \infty$ δείξτε ότι για $n = 1, 2, \ldots$

$$m\{f > n\} \le \frac{C}{n},$$

όπου C μια σταθερά που δεν εξαρτάται από το n (αλλά μπορεί να εξαρτάται από την f).

8. Αν $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι μη αρνητική και μετρήσιμη και για $n = 1, 2, \ldots$ ισχύει

$$m\{f > n\} \le \frac{1}{n^2},$$

δείξτε ότι $\int_{[0,1]} f < \infty$.

Γράψτε

$$\int_{[0,1]} f = \int_{\{f<1\}} f + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{2^n \le f < 2^{n+1}\}} f$$