1. (α) Αν $0 \le a_{m,n}$, $m, n = 1, 2, \ldots$, και για κάθε m, n ισχύει

$$a_{m,n} \le a_{m+1,n},$$

και $A_n = \lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ δείξτε ότι

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

(β) Αν $a_{m,n} \in \mathbb{C}$, $m, n = 1, 2, \ldots$, και για κάθε m, n ισχύει

$$|a_{m,n}| \le B_n$$

και $\sum_{n=1}^{\infty} B_n < \infty$ και $A_n = \lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ δείξτε ότι

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Πρόκειται για το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης για ακολουθίες. Χρησιμοποιήστε τα θεωρήματα αυτά για συναρτήσεις εφαρμοσμένα σε κατάλληλες συναρτήσεις $[1, +\infty) \to \mathbb{R}$ που φτιάχνετε από τις ακολουθίες που έχετε.

2. Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ δείξτε ότι

$$\lim_{\delta\to 1} \|f(\delta x) - f(x)\|_1 = 0.$$

Οι συναρτήσεις του $C_0(\mathbb{R})$ (συνεχείς συναρτήσεις που μηδενίζονται έξω από ένα φραγμένο διάστημα) είναι πυκνές στο $L^1(\mathbb{R})$.

3. Αν $f \in L^1([0, 1])$ και $g(x) = \int\limits_x^1 \frac{f(t)}{t}\, dt$ δείξτε ότι $g \in L^1([0, 1])$ και $\int_0^1 g = \int_0^1 f$.

Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Fubini.

4. Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ είναι ομοιόμορφα συνεχής δείξτε ότι $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

Αν όχι τότε υπάρχει μια ακολουθία $x_n \to \infty$ τέτοια ώστε $|f(x_n)| \ge c > 0$ για κάποιο $c > 0$.

5. Αν $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ είναι φθίνουσα και ολοκληρώσιμη δείξτε ότι $\lim_{x\to\infty} x f(x) = 0$.

$\lim_{x\to\infty} \int_x^{\infty} f = 0$.

6. Κατασκευάστε μια συνάρτηση $f : [0, 1] \to [0, \infty)$ που να είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$ αλλά να μην είναι φραγμένη σε κανένα υποδιάστημα του $[0, 1]$.

Αρκεί να μην είναι φραγμένη σε κανένα διάστημα με ρητά άκρα.

7. Ο *μετασχηματισμός Fourier* μιας συνάρτησης $f \in L^1(\mathbb{R})$ ορίζεται ως η συνάρτηση $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx.$$

Δείξτε ότι αν $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ τότε για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi).$$

Χρησιμοποιώντας αυτό δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $I : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ολοκληρώσιμη, ώστε να ισχύει

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) : f * I = f.$$

Δεν υπάρχει δηλ. μοναδιαίο στοιχείο για την πράξη της συνέλιξης στο $L^1(\mathbb{R})$.

Χρησιμοποιήστε το θεώρημα Fubini για το πρώτο μέρος.

8. Αν $E \subseteq [0, 1]$ είναι μετρήσιμο δείξτε ότι

$$\int\limits_E \cos^2(2\pi n x + u_n)\, dx \to \frac{1}{2} m(E) \quad (n \to \infty)$$

για κάθε ακολουθία u_n.

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$. Χρησιμοποιήστε επίσης το Λήμμα Riemann-Lebesgue που λέει ότι για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $\widehat{f}(\xi) \to 0$ για $|\xi| \to \infty$.

9. Αν η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x)$$

συγκλίνει για κάθε $x \in E \subseteq [0,1]$, με $m(E) > 0$, δείξτε ότι $a_n \to 0$, $b_n \to 0$.

Γράψτε την ποσότητα $a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x)$ στη μορφή $r_n \cos(2\pi n x + u_n)$ για κάποια $r_n > 0$, $u_n \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιήστε το πρόβλημα 8.