1. Έστω $E \subseteq (0,1)$ το σύνολο όλων των αριθμών του $(0,1)$ που σε κάποια δεκαδική τους αναπαράσταση δεν εμφανίζονται τα ψηφία 3 και 7. Δείξτε ότι $m(E) = 0$.

Το σύνολο είναι πολύ παρόμοιο με το σύνολο του Cantor. Δείξτε, ομοίως, ότι το E περιέχεται σε κάποια σύνολα με οσοδήποτε μικρό μέτρο.

2. Έστω $E \subseteq (0,1)$ το σύνολο όλων των αριθμών του $(0,1)$ που σε κάποια δεκαδική τους αναπαράσταση δεν εμφανίζονται τα ψηφία 3 και 7 σε άρτια θέση. Δείξτε ότι $m(E) = 0$.

Ενεργήστε όπως στην Άσκηση 1. Θέλει λίγο μεγαλύτερη προσοχή το να κατασκευάσετε τα σύνολα που περιέχουν το E. Εναλλακτικά μπορείτε να δείτε το σύνολό σας σας ένα σύνολο εντελώς παρόμοιο με αυτό της Άσκησης 1 αλλά στο σύστημα αρίθμησης με βάση το 100.

3. Δείξτε ότι το τριαδικό σύνολο Cantor έχει την ιδιότητα ότι για οποιαδήποτε δύο διαφορετικά σημεία του x, y υπάρχει ένα σημείο ανάμεσά τους που δεν ανήκει στο σύνολο Cantor.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε είτε την αναπαράσταση των στοιχείων του συνόλου Cantor στο τριαδικό σύστημα είτε την ίδια την κατασκευή του συνόλου. Η δεύτερη μέθοδος έχει το πλεονέκτημα ότι εφαρμόζεται σε όλες τις κατασκευές τύπου Cantor ενώ η τριαδική αναπαράσταση είναι κάτι που ισχύει μόνο για την συγκεκριμένη κατασκευή. Σκεφτείτε για παράδειγμα αντί να πετάμε το μεσαίο $1/3$ του κάθε διαστήματος να πετάμε ένα διάστημα της μορφής $(x, x+1/3)$ με $x \in (1/10, 1/2)$ το οποίο x να μπορεί να αλλάζει από το ένα βήμα της κατασκευής στο επόμενο. Τότε η ιδιότητα της άσκησης θα εξακολουθεί να ισχύει αλλά δεν υπάρχει κάποια χρήσιμη (τριαδική ή άλλη) αναπαράσταση του συνόλου με βάση τα ψηφία των αριθμών.

4. Ας είναι K ένα συμπαγές σύνολο και έστω $O_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{dist}\,(x, K) < \frac{1}{n}\right\}$. Δείξτε ότι $m(O_n) \to m(K)$.

Το O_n είναι ένα ανοιχτό σύνολο. Δείξτε ότι $m(O_1) < \infty$ και ότι $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$.

5. Δείξτε ότι το αποτέλεσμα της Άσκησης 4 δεν ισχύει αναγκαστικά αν το K είναι κλειστό αλλά όχι φραγμένο ή αν το K είναι φραγμένο και ανοιχτό.

Για το πρώτο φτιάξτε ένα σύνολο που να είναι μια ακολουθία μικρών διαστημάτων που «πάνε» στο άπειρο. Για το δεύτερο πάρτε ένα ανοιχτό διάστημα κατάλληλου μήκους γύρω από κάθε ρητό του $(0,1)$.

6. Ας είναι $E_n \subseteq \mathbb{R}$ μια ακολουθία μετρησίμων συνόλων με $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < \infty$. Ας είναι επίσης A το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών που ανήκουν σε άπειρα από τα E_n. Δείξτε ότι $m(A) = 0$.

Έχουμε δει το σύνολο $A = \limsup_n E_n$ στο πρώτο Φυλλάδιο ασκήσεων και το πώς αυτό γράφεται με συνολοθεωρητικές πράξεις. Χρησιμοποιήστε αυτή την αναπαράσταση και το ότι η σειρά στην υπόθεση συγκλίνει (άρα η ουρά της $\sum_{k \ge n} m(E_k)$ τείνει στο 0 για $n \to \infty$).

7. Ας είναι $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση και $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Δείξτε ότι το σύνολο $\{f = a\}$ είναι μετρήσιμο.

Γράψτε το σα μια αριθμήσιμη τομή συνόλων που ξέρουμε ότι είναι μετρήσιμα. Χειριστήτε διαφορετικά την περίπτωση $a = \pm\infty$.

8. Δείξτε ότι η σχέση «$f = g$ σχεδόν παντού» είναι μια σχέση ισοδυναμίας πάνω στις (όχι αναγκαστικά μετρήσιμες) συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$.

Απλά επαληθεύστε τα αξιώματα μιας σχέσης ισοδυναμίας. Μόνο η μεταβατική ιδιότητα θέλει λίγη σκέψη.

9. Ας είναι $E_n \subseteq \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα και $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = f_n(x) \text{ αν } x \in E_n \text{ ,0 αν } x \notin \bigcup_n E_n,$$

είναι μετρήσιμη.

Διασπάστε το σύνολο $\{f > \alpha\}$ στα διάφορα E_n.

10. Ας είναι f μια μετρήσιμη συνάρτηση στο $[0,1]$ που είναι σχεδόν παντού πεπερασμένη. Δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα $M > 0$ τ.ώ. $m\{|f| > M\} < \epsilon$.

Αν όχι δείξτε ότι $m\{|f| = \infty\} > 0$.

11. Ας είναι f_n μια ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων που είναι πεπερασμένες σχεδόν παντού. Δείξτε ότι υπάρχει μια ακολουθία $c_n > 0$ τ.ώ.

$$\frac{f_n(x)}{c_n} \to 0 \text{ σχεδόν παντού.}$$

Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 10 με κατάλληλα επιλεγμένο M για κάθε f_n. Έπειτα χρησιμοποιήστε την Άσκηση 6.