1. Έστω Σ εκείνα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που είναι αριθμήσιμα ή τα συμπληρώματα τους είναι αριθμήσιμα. Δείξτε ότι το Σ είναι μια σ-άλγεβρα πάνω στο $\mathbb{R}$.

Θα χρειαστείτε ότι αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων είναι αριθμήσιμο σύνολο.

2. Αν Σ είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση, δείξτε ότι το σύνολο $\left\{f^{-1}(A) : A \in \Sigma\right\}$ είναι σ-άλγεβρα.

Απλά εφαρμόζετε τον ορισμό. Εδώ $f^{-1}(A)$ είναι εκείνα τα x για τα οποία $f(x) \in A$.

3. Αν $K \subseteq \mathbb{R}$ είναι συμπαγές και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής για κάθε $x \in K$ δείξτε ότι υπάρχει $k \in K$ τ.ώ.

$$f(k) = \sup\{f(x) : x \in K\}.$$

Συμπαγές συνεπάγεται ακολουθιακά συμπαγές (κάθε ακολουθία στο K έχει υπακολουθία που συγκλίνει και μάλιστα μέσα στο K). Πάρτε μια ακολουθία $k_n \in K$ τ.ώ. $f(k_n) \to \sup\{f(x) : x \in K\}$.

4. Αν K_1, K_2 είναι συμπαγή σύνολα στο $\mathbb{R}$ και $d = \inf\{|k_1 - k_2| : \ k_1 \in K_1, k_2 \in K_2\}$ τότε υπάρχουν $x_1 \in K_1, x_2 \in K_2$ τ.ώ.

$$|x_1 - x_2| = d.$$

Χρησιμοποιήστε την ακολουθιακή συμπάγεια. Ξεκινήστε από μια ακολουθία $(k_n^1, k_n^2) \in K_1 \times K_2$ τέτοια ώστε

$$\left|k_n^1 - k_n^2\right| \to d.$$

Πάρτε μια υπακολουθία έτσι ώστε να συγκλίνουν τα k_n^1 και αυτής πάρτε μια υπακολουθία ώστε να συκλίνουν τα k_n^2.

5. Αν K_1, K_2 είναι δύο ξένα μεταξύ τους συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ δείξτε ότι

$$m^*(K_1 \cup K_2) = m^*(K_1) + m^*(K_2).$$

Δε μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ότι τα συμπαγή είναι Borel (ως κλειστά) και άρα μετρήσιμα.

Σύμφωνα με την Άσκηση 4 τα K_1, K_2 έχουν μεταξύ τους θετική απόσταση d. Ξεκινήστε από μια κάλυψη του $K_1 \cup K_2$ με ανοιχτά διαστήματα I_n και παρατηρήστε ότι μπορείτε να υποθέσετε ότι όλα τα I_n έχουν μήκος $< d$ (αν κάποιο διάστημα δεν έχει μπορείτε να το αντικαταστήσετε στην κάλυψη με ανοιχτά διαστήματα μήκους $< d$ και έτσι ώστε το συνολικό επιπλέον μήκος που προσθέτετε στην κάλυψή σας έτσι να είναι όσο μικρό θέλετε). Διαμερίστε έπειτα τα διαστήματα της κάλυψης του $K_1 \cup K_2$ σε δύο κατηγορίες: αυτά που τέμνουν το K_1 και αυτά που τέμνουν το K_2 (μπορείτε επίσης να υποθέσετε ότι κάθε διάστημα της κάλυψης τέμνει το K_1 ή το K_2, αφού αλλιώς είναι άχρηστο για την κάλυψη).

6. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει $m^*(A) = 0$ δείξτε ότι για κάθε $B \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει $m^*(A \cup B) = m^*(B)$.

Η μια κατεύθυνση έπεται από τη μονοτονία του m^*. Για την άλλη πάρτε μαζί μια κάλυψη του A και μια του B.

7. Δείξτε ότι κάθε σύνολο με εξωτερικό μέτρο μηδέν είναι μετρήσιμο.

Το μόνο που χρειάζεστε είναι η μονοτονία του m^*.

8. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\epsilon > 0$ δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subseteq E$ και $m(E) = m^*(A)$.

Έχουμε ήδη δείξει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ανοιχτό $G \supseteq A$ με $m(G) \le m^*(A) + \epsilon$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μια ακολουθία από τέτοια ανοιχτά σύνολα.

9. Ας είναι $E_1, E_2, \ldots$ μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και ορίζουμε το σύνολο $\liminf E_n$ να είναι εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ που ανήκουν τελικά σε όλα τα E_j (από κάποιο δείκτη j και πέρα δηλαδή) και το σύνολο $\limsup E_n$ να είναι εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ που ανήκουν σε άπειρα από τα E_j. Δείξτε ότι αυτά τα δύο σύνολα είναι μετρήσιμα.

Δείξτε πρώτα ότι

$$\liminf E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k, \quad \limsup E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k.$$

10. Αν το μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει $m(E) > 0$ δείξτε ότι υπάρχει διάστημα I τ.ώ.

$$m(E \cap I) \ge \frac{9}{10}|I|.$$

Έστω όχι. Τότε σε κάθε διάστημα έχουμε $m(E \cap I) < \frac{9}{10}|I|$. Εφαρμόστε το αυτό σε μια κάλυψη του E με ανοιχτά διαστήματα και συνολικού μήκους πολύ κοντά στο $m(E)$ και καταλήξτε σε άτοπο.