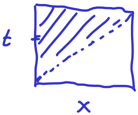
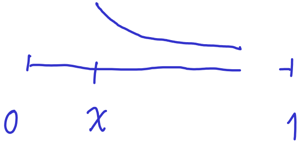
3. Αν $f \in L^1([0,1])$ και $g(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,dt$ δείξτε ότι $g \in L^1([0,1])$ και $\underbrace{\int_0^1 g = \int_0^1 f}$.

Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Fubini.



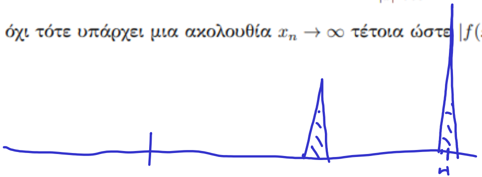


$$\int_0^1 |g| = \int_0^1 \left| \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,dt \right| dx$$

$$\leq \int_0^1 \int_x^1 \frac{|f(t)|}{t}\,dt\,dx = \int_0^1 \int_0^t \frac{|f(t)|}{t}\,dx\,dt = \int_0^1 \frac{|f(t)|}{\cancel{t}}\,\cancel{t}\,dt < \infty$$

4. Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ είναι ομοιόμορφα συνεχής δείξτε ότι $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

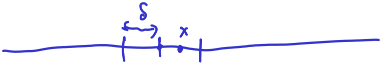
Αν όχι τότε υπάρχει μια ακολουθία $x_n \to \infty$ τέτοια ώστε $|f(x_n)| \geq c > 0$ για κάποιο $c > 0$.



$x_{n+1} - x_n > 10$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ δεν υπάρχει ή δεν είναι 0. $\Rightarrow \exists\, x_n \to +\infty$ τ.ώ.

$f(x_n) \geq c > 0$.



x_n

$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

$\epsilon = c/2, \quad \delta < 1$

Στο $(x_n - \delta, x_n + \delta)$: $f(x) \geq \frac{c}{2}$

$\Rightarrow \int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} f \geq c \cdot \delta$

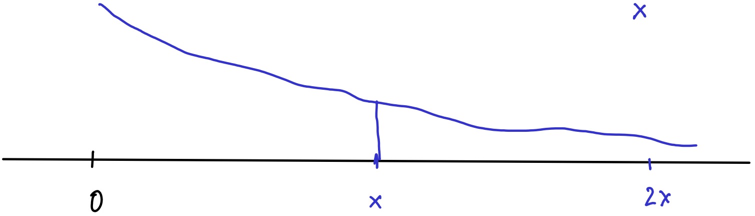
$(x_n - \delta, x_n + \delta)$ ξένα $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f| \geq \sum_n \int_{(x_n-\delta, x_n+\delta)} f \geq \sum_n c\delta = +\infty$

5. Αν $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ είναι φθίνουσα και ολοκληρώσιμη δείξτε ότι $\lim_{x\to\infty} x\underbrace{f(x)}=0$.

$\lim_{x\to\infty}\int_x^\infty f = 0$.

$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right) \quad x\to+\infty$

$$\int f<\infty \Rightarrow \int_x^\infty f(t)\,dt \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$



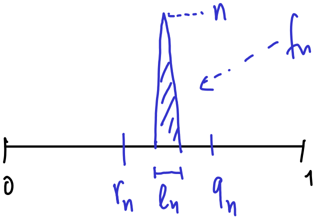
$$\underbrace{\int_x^\infty f}_{\downarrow\, 0} \geq \int_x^{2x} f(t)\,dt \geq \int_x^{2x} f(2x)\,dt = x\,f(\underbrace{2x}_{y}) = \frac{1}{2}\, y\, f(y)$$

6. Κατασκευάστε μια συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,\infty)$ που να είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ αλλά να μην είναι φραγμένη σε κανένα υποδιάστημα του $[0,1]$.

Αρκεί να μην είναι φραγμένη σε κανένα διάστημα με ρητά άκρα.

αριθμήσιμα

(r_1, q_1), (r_2, q_2), … τα υποδιαστήματα του $(0,1)$ με ρητά άκρα



$$\frac{1}{2} l_n \cdot n = \frac{1}{2^n}$$

$$l_n = \frac{1}{n\, 2^{n+1}}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

$f_n(x)$ ζει στο (r_n, q_n)

$$\int f = \sum \int f_n < \infty$$

$$\int f_n \le \frac{1}{2^n}$$

A, B αριθμήσιμα

$A = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$

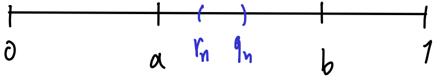
$B = \{b_1, \dots, b_k, \dots\}$

$A \times B = \{ (a_i, b_j) : i, j \in \mathbb{N} \}$

(a_i, b_j) $\quad i,j \le 1$

—‖— $\quad i,j \le 2$

—‖— $\quad i,j \le 3$



$$(a,b) \supseteq (r_n, q_n)$$

με οσοδήποτε μεγάλο n

$$\sup_{(a,b)} f(x) \geq \sup_{(r_n,q_n)} f(x)$$

$$\geq \sup_{(r_n,q_n)} f_n(x) = n \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \sup_{(a,b)} f = +\infty$$

7. Ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης $f \in L^1(\mathbb{R})$ ορίζεται ως η συνάρτηση $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx.$$

Δείξτε ότι αν $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ τότε για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi). \quad ✓$$

Χρησιμοποιώντας αυτό δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $I : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ολοκληρώσιμη, ώστε να ισχύει

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) : f * I = f. \longrightarrow \hat{f}(\xi) \cdot \hat{I}(\xi) = \hat{f}(\xi) \quad \forall f \in L^1$$

Δεν υπάρχει δηλ. μοναδιαίο στοιχείο για την πράξη της συνέλιξης στο $L^1(\mathbb{R})$.

Χρησιμοποιήστε το θεώρημα Fubini για το πρώτο μέρος.

Αν $\hat{f}(\xi) \neq 0 \Rightarrow \hat{I}(\xi) = 1$

$$f * g(x) = \int f(y)\, g(x-y)\, dy$$

$\forall \xi : \hat{I}(\xi) = 1$

R-L: $\hat{I}(\xi) \xrightarrow[\xi \to \infty]{} 0$

$ds = dx$

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int \int f(y)\, g(x-y)\, dy\; e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx = \int f(y) \int g(\overbrace{x-y}^{s})\, e^{-2\pi i \xi x}\, dx\, dy$$

$$= \int f(y) \int g(s)\, e^{-2\pi i \xi (s+y)}\, ds\, dy = \underbrace{\int f(y)\, e^{-2\pi i \xi y}}_{\hat{f}(\xi)} \underbrace{\int g(s)\, e^{-2\pi i \xi s}\, ds}_{\hat{g}(\xi)}\, dy$$

8. ~~Αν $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση και~~ $E\subseteq[0,1]$ είναι μετρήσιμο δείξτε ότι

$$\int_E \cos^2(2\pi n x+u_n)\,dx \to \frac{1}{2}m(E)\quad (n\to\infty)$$

για κάθε ακολουθία u_n.

$$\int f(x)\cos^2(2\pi n x+u_n)dx \to \frac{1}{2}\int f$$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$. Χρησιμοποιήστε επίσης το Λήμμα Riemann-Lebesgue που λέει ότι για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $\widehat{f}(\xi)\to 0$ για $|\xi|\to\infty$.

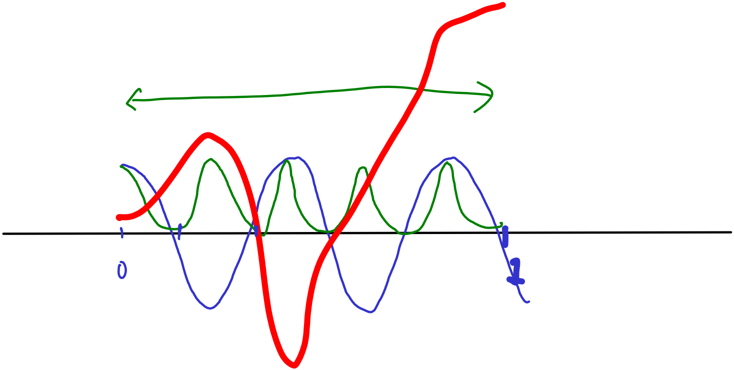
$$\cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2} \qquad \int_E \cos^2(2\pi n x+u_n)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_E \cos(4\pi n x+2u_n)+1\,dx = +\frac{1}{2}m(E) + \int_E \cos(4\pi n x+2u_n)\,dx \to 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}e^{i\theta}+\frac{1}{2}e^{-i\theta}$$

$$= \int \underline{\mathbb{1}_E(x)}\cos(4\pi n x+2u_n)\,dx = \frac{1}{2}\int \mathbb{1}_E(x)\underline{e^{i2u_n}}\,e^{i4\pi n x}dx$$

$$+\frac{1}{2}\int \mathbb{1}_E(x)e^{-i2u_n}e^{-i4\pi n x}dx = \frac{e^{i2u_n}}{2}\underbrace{\int \mathbb{1}_E(x)e^{-2\pi i(-2n)x}dx}_{\widehat{\mathbb{1}_E}(-2n)\to 0\ (R-L)} + \dots$$


0
1

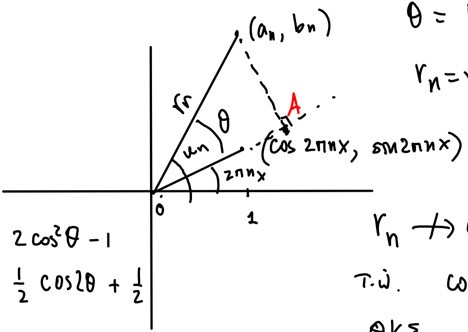
9. Αν η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x)}^{\to 0}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x}$$

συγκλίνει για κάθε $x \in E \subseteq [0,1]$, με $m(E) > 0$, δείξτε ότι $a_n \to 0$, $b_n \to 0$.

Γράψτε την ποσότητα $a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x)$ στη μορφή $r_n \cos(2\pi n x + u_n)$ για κάποια $r_n > 0$, $u_n \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιήστε το πρόβλημα 8.



$$\theta = u_n - 2\pi n x$$

$$r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x$$

$$\| \quad |OA| = r_n \cos\theta$$

$$= r_n \cos(2\pi n x - u_n) \to 0$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}$$

$r_n \not\to 0$: $\exists\, n_k$

τ.ώ. $\cos^2(2\pi n_k x - u_{n_k}) \xrightarrow{k} 0$

ΘΚΣ

$$\underbrace{\int \mathbb{1}_E(x) \cos^2(2\pi n_k x - u_{n_k})\, dx}_{|\cdot| \le 2\, \mathbb{1}_E \in L^1} \longrightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\int \mathbb{1}_E + \frac{1}{2}\int \mathbb{1}_E \cos(4\pi n_k x + 2u_{n_k})$$

$-\frac{1}{2} m(E)$

$\Rightarrow$ R-L $\to 0$