Θ. Weierstrass

$f : [a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχής

$\epsilon > 0$

$\exists$ πολυώνυμο $p(x)$: $\forall x \in [0,1]$:

$$|p(x) - f(x)| < \epsilon .$$

$\exists$ ακ. πολ. $P_n(x) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f(x)$

$$\|P_n(x) - f(x)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P_n(x)| \to 0$$

Απόδειξη Landau

Αρχή $f:[0,1]\to\mathbb{C}$, $f(0)=f(1)=0$.

$$K_n(t)=\begin{cases} c_n(1-t^2)^n & |t|\leq 1 \\ 0 & |t|>1 \end{cases} \qquad c_n \text{ τ.ώ. } \int K_n=1$$

$$L_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\,K_n(t)\,dt$$ είναι πολυώνυμα.

$L_n\to f$ στην $\|\cdot\|_\infty$

$K_n(x)$ είναι προσέγγιση της μονάδας

$K_n(x) \geq 0$

$\int K_n(x)\,dx = 1$

$$K_n(t) = \begin{cases} c_n(1-t^2)^n & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases} \longrightarrow c_n = \frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt}$$

c_n τ.ώ. $\int K_n = 1$

$\forall \epsilon > 0 \quad \int_{|x|>\epsilon} K_n(x)\,dx \xrightarrow{n} 0$

$$2c_n\int_{\epsilon}^{1}(1-t^2)^n dt \leq 2\,c_n\,\underbrace{(1-\epsilon^2)^n}_{\downarrow\, 0} \longrightarrow 0$$

$c_n \leq \frac{3}{4}\sqrt{n}$

L_n

$\shortparallel$

$f * K_n \longrightarrow f$

ομοιόμορφα

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt \geq 2 \int_0^{1/\sqrt{n}} (1-t^2)^n \, dt \geq 2 \int_0^{1/\sqrt{n}} 1 - n t^2 \, dt$$

Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1 + nx \quad (x \geq -1)$

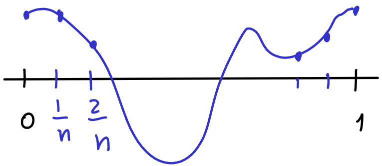
$$= 2 \left(t - \frac{n}{3} t^3 \right) \Big|_0^{1/\sqrt{n}}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{n}{3 n^{3/2}} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{3\sqrt{n}} = \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{n}} \right.$$

$$\Longrightarrow \quad C_n \leq \frac{3}{4} \sqrt{n}$$

Απόδειξη με τα πολυώνυμα Bernstein
(πιθανοθεωρητική)



$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underbrace{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}} \xrightarrow{n} f \text{ ομοιόμ. στο } [0,1]$$

$\binom{n}{k}$ = με πόσους τρόπους μπορεί να διαλέξει k αντικείμενα από n χωρίς σειρ

= πόσα υποσύνολα μεγ. k έχει ένα σύνολο με n στοιχεία

$\boxed{0 \le k \le n}$ $= \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$

$$\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$0 \leq x \leq 1$

Νόμισμα που φέρνει κορώνα με πιθ. x. Ρίχνω n φορές

$$\mathbb{P}(\text{φέρω } k \text{ κορώνες}) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$ (Διωνυμική κατανομή)

$\underline{\quad}_1 \quad \underline{\quad}_2 \quad \underline{\quad}_3 \quad \cdots \quad \underline{\quad}_n$

Θέλω οι κορώνες να είναι στις θέσεις $\underbrace{i_1, i_2, \ldots, i_k}$: $x^k (1-x)^{n-k}$

$$\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

X = πόσες κορώνες φέρνω στις n ρίψεις

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{φέρνω κορώνα στην } j \text{ ρίψη} \quad (\text{πιθ. } x) \\ 0 & \text{αλλιώς} \quad (\text{πιθ. } 1-x) \end{cases} \Rightarrow \mathbb{E} I_j = x$$

$$X = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

$$\mathbb{E} X = \mathbb{E} I_1 + \mathbb{E} I_2 + \dots + \mathbb{E} I_n = x + \dots + x = n x \quad \Big| \quad \sigma^2(X) = n x (1-x)$$

$$\operatorname{Var} X = \sigma^2(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2 - 2\, \mathbb{E}X \cdot X + (\mathbb{E}X)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - 2\, \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$$

X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow \sigma^2(X+Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$

$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$ (X, Y ανεξάρτητες)

$$\sigma^2(X+Y) = \mathbb{E}\left[(X+Y)^2\right] - \left(\mathbb{E}(X+Y)\right)^2 = \mathbb{E}\left[X^2+Y^2+2XY\right] - (\mathbb{E}X+\mathbb{E}Y)^2$$

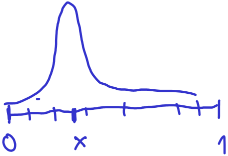
$$= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) + \cancel{2\,\mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y} - (\mathbb{E}X)^2 - (\mathbb{E}Y)^2 - \cancel{2\,\mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y}$$

$$= \sigma^2(X) + \sigma^2(Y).$$

$$\sigma^2(X) = \sigma^2(I_1 + \dots + I_n) = \sigma^2(I_1) + \dots + \sigma^2(I_n) = n\,\sigma^2(I_1)$$

$$\sigma^2(I_1) = \mathbb{E}(I_1^2) - (\mathbb{E}I_1)^2 = x - x^2 = x(1-x) \quad = n x(1-x)$$

$X \in \mathbb{Z}$ $\qquad f_X(j) = \mathbb{P}(X=j)$



$$\mathbb{E}X = \sum_j j \cdot \mathbb{P}(X=j) = \sum j \, f_X(j)$$

$$\mathbb{E}\frac{X}{n} = x$$

$$\sigma^2\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2} n x(1-x)$$

$$0, \dots, 1 = \underbrace{\frac{x(1-x)}{n}}_{\to 0}$$

$$\mathbb{E}\left[\underbrace{\varphi(X)}\right] = \sum_j \varphi(j) \, f_X(j)$$

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underbrace{\overbrace{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}^{f_X(k)}} = \mathbb{E} f\left(\frac{X}{n}\right)$$

Ανισότητα Chebyshev $\quad X \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{E}(|X|^2) < \infty,$

$\mu = \mathbb{E}X \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2(X)}$ τότε $\forall \lambda > 0$:

$$\mathbb{P}\left(|X-\mu| > \lambda\sigma \right) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

Ανισότητα Markov : $\quad X \in \mathbb{N}, \quad \mu = \mathbb{E}X$ τότε

$$\mathbb{P}\left(X > \lambda\mu \right) \leq \frac{1}{\lambda}$$

Markov

$$\mathbb{P}(X > \lambda\mu) \leq \frac{1}{\lambda}$$

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} n \, \mathbb{P}(X=n) \geq \sum_{n > \lambda\mu} n \, \mathbb{P}(X=n)$$

$$\geq \lambda\mu \left[\sum_{n>\lambda\mu} \mathbb{P}(X=n) \right] = \lambda\mu \, \mathbb{P}(X > \lambda\mu)$$

$$\mu \geq \lambda\mu \, \mathbb{P}(X > \lambda\mu)$$

$$\frac{1}{\lambda} \geq \mathbb{P}(X > \lambda\mu)$$

Chebyshev and Markov:

$$\mathbb{P}\left(\underbrace{|X-\mu|^2}_{Y} > \lambda^2 \underbrace{\sigma^2}_{= \mathbb{E}Y}\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{E}Y = \sigma^2(X) = \sigma^2$$

$$\mathbb{P}\left(Y > \lambda^2 \mathbb{E}Y\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

Chebyshev

$$t = \lambda\sigma \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\sigma^2}{t^2}$$

$$\mathbb{P}\left(|X-\mu| > t\right) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$$

X = πόσες κορώνες σε n ρίψεις $\qquad \dfrac{X}{n}$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - x\right| > t\right) \leq \frac{\sigma^2\left(\frac{X}{n}\right)}{t^2} = \frac{x(1-x)}{n t^2}$$

$$t \geq \frac{c}{\sqrt{n}}$$

Ενδεχόμενο $E = \left\{ \left| \frac{X}{n} - x \right| \geq \frac{1}{n^{1/3}} \right\}$

$$\mathbb{P}(E) \leq \frac{\sigma^2(X/n)}{n^{-2/3}} = \frac{x(1-x)}{n\, n^{-2/3}} = \frac{x(1-x)}{n^{1/3}} \longrightarrow 0$$

$$\left| f(x) - B_n(f)(x) \right| = \left| f(x) - \mathbb{E} f\left(\frac{X}{n}\right) \right| =$$

$$= \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right| =$$

$$\left| \sum_{k=0}^{n} f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ |x-\frac{k}{n}| \leq \frac{1}{n^{1/3}}}}^{n} + \sum_{\substack{k=0 \\ |x-\frac{k}{n}| > \frac{1}{n^{1/3}}}}^{n} = \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

$$I = \sum_{\substack{k=0 \\ \left|x-\frac{k}{n}\right| \leq \frac{1}{n^{1/3}}}}^{n} \underbrace{\left| f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right) \right|}_{\leq \varepsilon} \binom{n}{k} x^{k} (1-x)^{n-k}$$

Για n αρκετά μεγάλο ισχύει: $|z-w| \leq \frac{1}{n^{1/3}} \Rightarrow |f(z)-f(w)| \leq \varepsilon$.

$I \leq \varepsilon$ για n αρκετά μεγάλο.

$$\mathrm{II} = \sum_{\substack{k=0 \\ |x-\frac{k}{n}| > \frac{1}{n^{1/3}}}}^{n} \left| f(x) - f(k/n) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq$$

$$\leq 2\|f\|_\infty \sum_{\substack{k=0 \\ |x-k/n| > 1/n^{1/3}}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 2\|f\|_\infty \, \mathbb{P}\left(\left| \frac{X}{n} - x \right| > \frac{1}{n^{1/3}} \right)$$

$$\leq 2\|f\|_\infty \frac{x(1-x)}{n^{1/3}} \longrightarrow 0 \quad \text{άρα} \quad \leq \varepsilon$$

για αρκ. μεγ. n

1. (α) Αν $0 \le a_{m,n}$, $m, n = 1, 2, \ldots$, και για κάθε m, n ισχύει

$$a_{m,n} \le a_{m+1,n},$$

και $A_n = \lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ δείξτε ότι

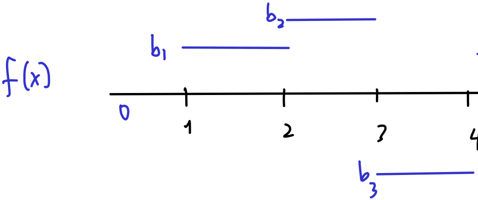
$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

$$S_m = \sum_n a_{m,n}$$

$$\begin{array}{lllll}
S_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots \\
S_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots \\
 & \vdots & & & \\
S_m & a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\sum A_k = & A_1 & A_2 & A_3 & \cdots
\end{array}$$

$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \dots$

$$f_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[n,n+1)}(x)\, a_{m,n}$$



$$f(x) = \lim_m f_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[n,n+1)}(x)\, A_n$$

$$f_m(x) \leq f_{m+1}(x)$$

$$\int f = \sum_n b_n$$

$$\int f_m = \sum_n a_{m,n} = s_m$$

ΘMT $\quad \int f_m \xrightarrow{m} \int \lim f_m = \int f = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$

2. Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ δείξτε ότι

$$\lim_{\delta \to 1} \|f(\delta x) - f(x)\|_1 = 0.$$

$\frac{1}{2} < \delta < \frac{3}{2}$

Οι συναρτήσεις του $C_0(\mathbb{R})$ (συνεχείς συναρτήσεις που μηδενίζονται έξω από ένα φραγμένο διάστημα) είναι πυκνές στο $L^1(\mathbb{R})$.

$f \in C_0(\mathbb{R})$ ομοιόμ. συνεχής $\quad f : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(\delta x) - f(x)|\, dx = \int_{\frac{2}{3}a}^{2b} \overbrace{|f(\delta x) - f(x)|}^{\leq \varepsilon}\, dx \leq \varepsilon\left(2b - \tfrac{2}{3}a\right)$$

$a, b > 0 \quad \left[\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right] \subseteq \left[\frac{2}{3}a, 2b\right]$

$$|\delta x - x| = |(1-\delta)x| \leq |1-\delta| \cdot |x| \leq |1-\delta| \cdot b < \eta$$

$$|s-t| < \eta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon$$

ϵ

$$\| f(\delta x) - f(x) \|_1 = \| f(\delta x) - g(\delta x) + g(\delta x) - g(x) + g(x) - f(x) \|_1$$

$g \in C_0(\mathbb{R})$

$$\leq \underbrace{\| f(\delta x) - g(\delta x) \|_1}_{\leq \eta/\delta \, \leq \, \epsilon/5} + \underbrace{\| g(\delta x) - g(x) \|_1}_{\leq \epsilon/3} + \underbrace{\| g - f \|_1}_{\leq \eta \, \leq \, \epsilon/10}$$

$\| g - f \|_1 \leq \eta$

$$\int | f(\delta x) - g(\overbrace{\delta x}^{y}) | \, dx = \frac{1}{\delta} \int | f(y) - g(y) | \, dy \leq \frac{\eta}{\delta}$$

$\eta = \epsilon/10$

$\frac{1}{2} < \delta < 3/2 \qquad \frac{\eta}{\delta} \leq \frac{\epsilon}{10} \cdot 2 = \frac{\epsilon}{5}$