# Μέτρο & ολοκλ. Lebesgue στο $\mathbb{R}^d$

$$m^*(E) = \inf_{E \subseteq \bigcup_n I_n} \sum_n |I_n|$$

$I_n = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d)$

$|I_n| = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d)$

$\mathbb{C}$

**Θεώρημα Fubini** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $\int_{\mathbb{R}^2} |f| < \infty$ τότε

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int \left( \int f(x,y)\, dx \right) dy = \int \left( \int f(x,y)\, dy \right) dx .$$

Αν $f \geq 0$ τότε αυτό ισχύει πάντα. Αλλά αν $\iint |f(x,y)|\, dx\, dy < \infty$ ή $\iint |f(x,y)|\, dy\, dx < \infty$ τότε $\int_{\mathbb{R}^2} |f| < \infty$ και όλα ίσα μεταξύ τους.

$L^1(\mathbb{R})$, $L^1(\mathbb{R}^d)$ $\quad f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ т.ω. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |f| < \infty$.

$L^p(\mathbb{R}^d)$ : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p < \infty \qquad p \geq 1$

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p\right)^{1/p} \qquad p \geq 1$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f|$$

$L^\infty(\mathbb{R}^d)$ : $\operatorname{ess\,sup}|f| < \infty$

$\varphi \in \mathbb{R}$

$m\{x \in E : f(x) > M\}$

$$\operatorname*{ess\,sup}_E \varphi = \inf\{M : \overline{m\{f > M\}} = 0\}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{όταν } x = 1/2 \\ 10 & \ldots\ x = 1/2 \end{cases}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{[0,1]} f = 1$$

$M > 1$ : $\{f > M\} \subseteq \{\tfrac{1}{2}\}$

Συνέλιξη δύο συναρτήσεων $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$f * g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ $\qquad f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, g(x-y)\, dy$

Θ σ$\forall x$ υπάρχει το

σ$\forall x$ η συνάρτηση $f(y)\, g(x-y)$ είναι ολοκληρώσιμη

δηλ. $\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \cdot |g(x-y)|\, dy < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |f|(y)\, |g|(x-y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^d} |f|(y) \left[ \int_{\mathbb{R}^d} |g|(x-y)\, dx \right] dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |f|(y) \left( \int_{\mathbb{R}^d} |g| \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} |g| \int_{\mathbb{R}^d} |f| < \infty$$

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(y)\, g(x-y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^d} \overbrace{\boxed{\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, g(x-y)\, dy}}^{f * g(x)} dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, g(x-y)\, dy \right) dx \quad \text{υπάρχει γιατί}$$

Αφού $\int\int |f(y)|\, |g(x-y)|\, dx\, dy < \infty \Longrightarrow$

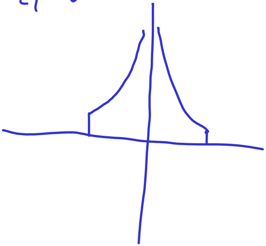
η συν. $\int |f(y)| \cdot |g(x-y)|\, dy < \infty$ σ. $\forall x$

άρα σ$\forall x$ $\int f(y)\, g(x-y)\, dy$ υπάρχει.

$f * g\,(x)$ υπάρχει σ$\forall x$ αρκεί $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$d=1$

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{αν } |x|<1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad \int_{-1}^{1}|f|\,,\ \int_{-1}^{1}|g| < \infty$$



$f*g\,(x)$ υπάρχει για $x \neq 0$

$f, g \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\boxed{\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1}$

$\boxed{\|f*g\|_\infty \leq \|g\|_\infty \|f\|_1}$

$\underline{|g| \leq M} \not\Rightarrow g \in L^1$

$$\underbrace{f}_{L^1} * \underbrace{g}_{L^\infty}(x) = \int f(y)\, g(x-y)\, dy$$

$$\int |f(y)|\, |g(x-y)|\, dy \leq M \int |f(y)|\, dx$$

$$= M \cdot \|f\|_1$$

$$f * g(x) = g * f(x), \quad \forall x \quad (\text{αντιμεταθετικότητα})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(\overbrace{x-y}^{z})\, dy = \int f(x-z)\, g(z)\, dz = \int g(z)\, f(x-z)\, dz$$

$$y = x - z \qquad\qquad = g * f(x)$$

$$f * (g * h) = (f * g) * h \quad (\text{προσεταιριστικότητα})$$

$$(\lambda f + \mu g) * h = \lambda f * h + \mu g * h$$

# $L^p(\mathbb{R}^d)$

$$d(f,g) = \|f-g\|_p$$

$$f \equiv g \iff m\{f \neq g\} = 0$$

σχέση ισοδυναμίας

$$d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$$

$$\|f-g\|_p \leq \|f-h\|_p + \|h-g\|_p \iff \boxed{\|\alpha+\beta\|_p \leq \|\alpha\|_p + \|\beta\|_p}$$

αν. Minkowski $\quad \infty \geq p \geq 1$

$$d(f,g) = 0 \iff f = g$$

$$\int |f-g|^p > 0$$

$$\Downarrow$$

$$m\{f \neq g\} > 0$$

## Ανισότητα Hölder

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

(συζυγείς εκθέτες)

$1 < p \leq q < \infty$

$p = 1, \; q = \infty \qquad p = \infty, \; q = 1$

$$\int |fg| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

$$\int |f| \cdot |g| \leq \int |f| \, \|g\|_\infty =$$

$$= \|g\|_\infty \|f\|_1$$

# Ανισότητα Young

$a,b>0$ $\boxed{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}$ : $a\cdot b \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ $\quad p,q \neq 1$

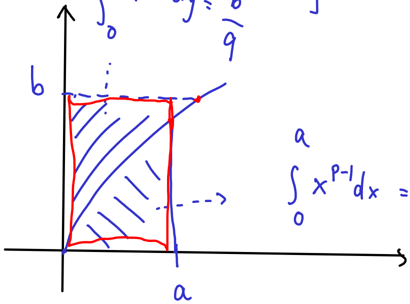
$\Updownarrow$

$q-1 = \frac{1}{p-1}$

με ισότητα όταν $\boxed{a^p = b^q}$

---

$$\int_0^b y^{q-1}\,dy = \frac{b^q}{q} \qquad y = x^{p-1} \Leftrightarrow x = y^{q-1} \qquad p \le 2 \le q$$




$$\int_0^a x^{p-1}\,dx = \frac{a^p}{p}$$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Αν. Hölder

$$\Uparrow$$

$$\|fg\|_1 \leq 1 \quad \text{αν } \|f\|_p = \|g\|_q = 1$$

$$\| $$

$$\int |f|\cdot|g| \overset{\text{Young}}{\leq} \int \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} =$$

$$= \frac{1}{p}\int |f|^p + \frac{1}{q}\int |g|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Ισότητα ανν $|f|^p = |g|^q$ σ.π.

$$\int |f|\cdot|g| \leq \left(\int |f|^p\right)^{1/p} \left(\int |g|^q\right)^{1/q}$$

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

$$\frac{1}{\|f\|_p \, \|g\|_q} \|fg\|_1 \leq 1$$

$$\left\| \underbrace{\frac{f}{\|f\|_p}}_{F} \cdot \underbrace{\frac{g}{\|g\|_q}}_{G} \right\| \leq 1$$

$$\|F\|_p = 1 = \|G\|_q$$

$p = q = 2$

ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\left| \underbrace{\int f \cdot \bar{g}}_{\parallel} \right| \leq \left( \int |f|^2 \right)^{1/2} \left( \int |g|^2 \right)^{1/2}$$

$\langle f, g \rangle$ εσωτερικό γινόμενο υπάρχει αρκεί $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\|f\|_2^2 = \int |f|^2 = \langle f, f \rangle^2$$

$$L^p(\mathbb{R}^d) = \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \,, \quad \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p < \infty \right\}$$

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

$A \subseteq \mathbb{R}^d$

$$L^p(A) = \left\{ f : A \to \mathbb{C} \,, \quad \int_A |f|^p < \infty \right\}$$

$$0 < m(A) < \infty \quad 1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty \implies L^{p_2}(A) \subseteq L^{p_1}(A)$$

Αν $m(A) = 1$ τότε $\|f\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_2}$.

$$\int_A |f|^{p_1} = \int_A |f|^{p_1} \cdot 1 \leq \left( \int |f|^{\cancel{p_1} \frac{p_2}{\cancel{p_1}}} \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \cdot m(A)^{\frac{p_2 - p_1}{p_2}} = \|f\|_{p_2}^{p_1} \cdot m(A)^{\frac{p_2 - p_1}{p_2}}$$

$$p = \frac{p_2}{p_1} > 1 \,, \quad \frac{1}{q} + \frac{p_1}{p_2} = 1 \implies \frac{1}{q} = \frac{p_2 - p_1}{p_2} \implies q = \frac{p_2}{p_2 - p_1}$$

$$\int_A |f|^{p_1} \leq \|f\|_{p_2}^{p_1} \, m(A)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}$$

$$\|f\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_2} \, m(A)^{\frac{p_2-p_1}{p_1 p_2}}$$

$$L^{p_2}(A) \subseteq L^{p_1}(A)$$

π.χ. $L^p([0,1])$ φθίνουν ως προς $p$

# Ανισότητα Markov ή Chebyshev

$f \in L^p(A)$, $1 \leq p < \infty$, $\lambda > 0$. Τότε

$$m\{x \in A : |f(x)| \geq \lambda\} \leq \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p} = \int |f|^p$$

---

$$\int_A |f|^p \geq \int_{|f| \geq \lambda} |f|^p \geq \int_{|f|\geq\lambda} \lambda^p = \lambda^p \, m\{|f| \geq \lambda\}$$

$$m\{|f| \geq \lambda\} \leq \frac{\int_A |f|^p}{\lambda^p}$$

$\underline{m(A) = 1}$ $\quad f \in L^\infty(A) \implies \lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$

$\|f\|_p \uparrow$ αύξουσα ως προς $p$

$\underline{\epsilon > 0}$

$$E = \{ x \in A : |f(x)| \geq \overbrace{(1-\varepsilon)\underbrace{\|f\|_\infty}_{\text{ess sup}|f|}} \}$$

Τότε $\quad m(E) > 0$.

$$\underbrace{\|f\|_p} = \left( \int_A |f|^p \right)^{1/p} \geq \left( \int_E |f|^p \right)^{1/p} \geq \left[ (1-\varepsilon)^p \|f\|_\infty^p \, m(E) \right]^{1/p}$$

$$= m(E)^{1/p} (1-\varepsilon) \|f\|_\infty \implies \underbrace{\lim_{p \to \infty} \|f\|_p} \geq \cancel{(1-\varepsilon)} \|f\|_\infty \, \boxed{\lim_p m(E)^{1/p}} \to 1$$

άρα ίσα αφού $\|f\|_\infty \geq \|f\|_p$.