$$(A_r f)(x) = \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f(t)\,dt$$ f τοπικά ολοκληρ.

f συνεχής $\Longrightarrow$ $(A_r f)(x) \xrightarrow{r\to 0} f(x)$

Αρκεί να είναι η f τοπ. ολοκλ.: σ.$\forall x$: $(A_r f)(x) \xrightarrow{r\to 0} f(x)$

Μεγιστική συνάρτηση των Hardy - Littlewood

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} |f(t)|\,dt = \sup_{r>0} (A_r|f|)(x)$$

$$|A_r f(x)| \leq Mf(x)$$

$$\left| \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(t)\,dt \right| \leq \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(t)|\,dt \leq Mf(x)$$

A_r <u>γραμμικός τελεστής</u> : $A_r(\lambda f + \mu g) = \lambda A_r f + \mu A_r g$

M <u>υπογραμμικός τελ.</u> $\big[M(f+g)\big](x) \leq Mf(x) + Mg(x)$

$$M(f+g)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f+g| \leq \sup_{r>0} \left(\frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f| + \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |g| \right)$$

$$\leq \sup_r A_r|f| + \sup_r A_r|g| = Mf(x) + Mg(x)$$

Ασθενής ανισότητα: αν $\lambda > 0$ $m\{x : Mf(x) \geqslant \lambda\} \leqslant \frac{3\|f\|}{\lambda}$

$$\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f|$$

---

g ολοκληρώσιμη : $m\{x : |g(x)| \geqslant \lambda\} \leqslant \frac{\|g\|}{\lambda}$

$$\|g\| = \int_{\mathbb{R}} |g| = \int_{|g| \geqslant \lambda} |g| + \int_{|g| < \lambda} |g| \geqslant \int_{|g| \geqslant \lambda} |g| \geqslant \int_{|g| \geqslant \lambda} \lambda =$$

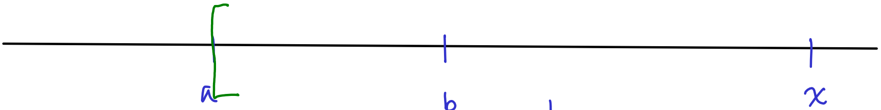
$$= \lambda \, m\{|g| \geqslant \lambda\}$$

Mf δεν είναι ολοκληρώσιμη εκτός αν $f \equiv 0$ (Άσκ 5, σελ. 32)

$m\{g \geq \lambda\} =: F_g(\lambda)$ συνάρτηση κατανομής της g

---

$\int |f| = 1$ $\qquad \int_a^b |f| \geq \frac{1}{2}$ $\qquad Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f|$



$r = x-a$ $\qquad Mf(x) \geq \frac{1}{2(x-a)} \int_a^{x+(x-a)} |f| \geq \frac{\int_a^b |f|}{2(x-a)} = \frac{1}{4(x-a)} \Rightarrow \int_a^{\infty} Mf(x)\,dx = +\infty$

Αν f ολοκλ. $\Rightarrow$ σ$\forall x$ $A_r f(x) \xrightarrow{r\to 0} f(x)$

Δείχνουμε $m\{\overbrace{x : \overline{\lim} \, |A_r f(x) - f(x)| > 0}^{S}\} = 0$

Αρκεί $\forall \delta > 0$: $\underbrace{m\{x : \overline{\lim_{r\to 0}} \, |A_r f(x) - f(x)| > \delta\}}_{S_\delta} = 0$

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{\frac{1}{n}}$$

$\underline{\epsilon>0}$ Υπάρχει $\underline{g\in C(\mathbb{R})}$ τ.ώ. $\|f-g\|<\epsilon$. $\boxed{A_r\varphi \le M\varphi}$

$$|A_r f(x) - f(x)| = |A_r f(x) - A_r g(x) + A_r g(x) - g(x) + g(x) - f(x)|$$

$$\le |A_r f(x) - A_r g(x)| + |A_r g(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|$$

$$= |A_r(f-g)(x)| + \text{—〃—} + \text{—〃—}$$

$$\le M(f-g)(x) + |A_r g(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|$$

$$\overline{\lim_{r\to 0}}\, |A_r f(x) - f(x)| \le M(f-g)(x) + \overline{\lim_{r}}\, \cancel{|A_r g(x) - g(x)|} + |g(x) - f(x)|$$

$=0$ γιατί g συνεχής

$$\overline{\lim_{r\to 0}} \left| A_r f(x) - f(x) \right| \leq M(f-g)(x) + |f(x) - g(x)|$$

$$m\left\{x : \overline{\lim} \left|A_r f(x) - f(x)\right| > \delta\right\} \leq \underbrace{m\left\{x : M(f-g)(x) > \tfrac{\delta}{2}\right\}}_{I} + \underbrace{m\left\{x : |f(x) - g(x)| > \tfrac{\delta}{2}\right\}}_{II}$$

Ασθ. ανισ. για την M : $\quad I \leq \dfrac{6\|f-g\|}{\delta}$

— || — για την $|f-g|$: $\quad II \leq \dfrac{2\|f-g\|}{\delta}$

(επειδή f, g ολοκλ.)

$$I + II \leq \frac{8}{\delta}\|f-g\| \leq \frac{8}{\delta}\varepsilon$$

αφού ε τυχαίο : $m\left\{x : \overline{\lim_{r}} \left|A_r f(x) - f(x)\right| > \delta\right\} = 0$. #

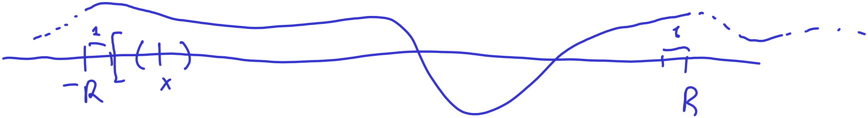
1 σελ. 32

f τοπ. ολοκλ. $\Rightarrow$ σ$\forall x$: $\underline{A_r f(x)} \xrightarrow{r \to 0} f(x)$

$$f_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } |x| > R \\ f(x) & \text{αλλιώς} \end{cases} \Rightarrow f_R \text{ ολοκλ.}$$

σ$\forall x \in \mathbb{R}$: $A_r f_R(x) \to f_R(x)$

$x \in [-R+1, R-1]$: αν $r < 1$: $A_r f_R(x) = \overbrace{A_r f(x)}^{\substack{f(x) \\ \uparrow}}$



2, σελ. 32

f τοπ. ολοκλ. $\Longrightarrow$ σ $\forall x$ $f(x) \leq Mf(x)$

$$f(x) \leq |f(x)| \leq Mf(x)$$

σ $\forall x$ $\quad |f(x)| = \lim_{r\to 0} A_r|f|(x) \leq Mf(x)$

$\forall r:$ $\quad A_r|f|(x) \leq Mf(x)$

3, σελ. 32 | f τοπ. ολοκλ. Τότε

σ $\forall x$: $\lim_{r\to 0} \underbrace{\frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} |f(y)-f(x)|\, dy}_{= [A_r |f(\cdot)-f(x)|](x)} = 0$

Χωρίς τις απόλυτες τιμές : $\frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f(y)-f(x)\, dy =$

$= A_r f(x) - f(x) \xrightarrow{r\to 0} 0$

$q \in \mathbb{Q} \leftarrow$ $\boxed{\varepsilon > 0}$

$$\Big[A_r\,|f(\cdot)-f(x)|\Big](x) = \Big[A_r\,|f(\cdot)-q+q-f(x)|\Big](x)$$

$$\leq \Big[A_r\,|f(\cdot)-q|\Big](x) + |q-f(x)|$$

$$\overline{\lim_{r\to 0}}\,\Big[A_r\,|f(\cdot)-f(x)|\Big](x) \leq |q-f(x)| + \overline{\lim_{r\to 0}}\,\Big[A_r\,|f(\cdot)-q|\Big](x)$$

σ $\cancel{q}$ $\forall x$: $A_r\,|f(\cdot)-q|\,(x) \longrightarrow |q-f(x)|$

x τ.ώ. να ισχύει ⟶ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. Παίρνω q τ.ώ. $|f(x)-q| < \varepsilon$.

$\overline{\lim_{r\to 0}}\,\Big[A_r\,|f(\cdot)-f(x)|\Big](x) \leq 2\varepsilon$. Αφού $\forall \varepsilon>0$: είναι 0.

Άσκ. 4, σελ. 32

Θεώρημα διαφορισιμότητας του Lebesgue

f τοπ. ολοκλ., $a \in \mathbb{R}$. $F(x) = \int_a^x f$ $\quad x > a$

σ $\forall x > a$: $F'(x) = f(x)$.

f συνεχής στο x : $F'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\int_a^{x+h} f - \int_a^x f}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{1}{h} \int_x^{x+h} f$

$F'(x) = f(x)$. Θέλω $\left| \frac{1}{h}\left(F(x+h) - F(x)\right) - f(x) \right| \xrightarrow{h\to 0} 0$

$$= \left| \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt \right|$$

$$= \frac{1}{|h|}\left| \int_x^{x+h} f(t) - f(x)\,dt \right| \leq 2\,\frac{1}{2|h|}\int_{x-h}^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt$$

$6\ \forall x \quad \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

$A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο $\qquad f = \mathbb{1}_A$

Άσκ. 3

$$\underbrace{\text{σ} \forall x \in \mathbb{R}}_{\downarrow \text{ δηλ.}} : \quad \lim_{r \to 0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(y) - f(x)|\, dy = 0$$

για $x \notin E$, $m(E) = 0$

$$x \in \underline{\underline{A}} \setminus E : \quad \lim_{r \to 0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} \overbrace{|\mathbb{1}_A(y) - 1|}^{= \begin{cases} 1 & \text{αν } y \notin A \\ 0 & \text{αν } y \in A \end{cases}} dy = 0$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{2r} m\left(A^c \cap [x-r, x+r]\right) \longrightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{r \to 0} \frac{1}{2r} m\left(A \cap [x-r, x+r]\right) \longrightarrow 1$$

Αν A μετρήσιμο τότε $\underbrace{\sigma\ \forall x}\in A$

$$\frac{1}{2r}\, m\big(A\cap[x-r,\, x+r]\big) \longrightarrow 1$$

x λέγεται σημείο πυκνότητας του A

$\sigma.\ \forall x\in A^c$

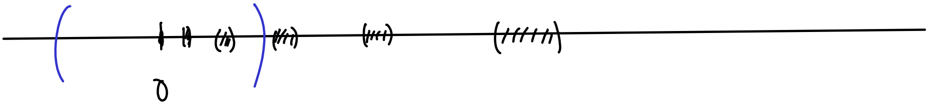
$$\frac{1}{2r}\, m\big(A\cap[x-r,\, x+r]\big) \longrightarrow 0$$

Αν x σημείο πυκνότητας του $A \Rightarrow x$ σημείο συσσώρευσης του A

Υπάρχουν σημ. συσ. που δεν είναι σημεία πυκνότητας.

$$\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n} + \frac{1}{10^n}\right]$$

$$\log_2 5^{-\log_2 r} = -\log_2 r \, \log_2 5$$



$$m(A \cap (-r,r)) = \sum_{n \geq \log_2 \frac{1}{r}} \frac{1}{10^n} \simeq \frac{1}{10^{-\log_2 r}} = \frac{1}{2^{-\log_2 r}\, 5^{-\log_2 r}} = \frac{r}{5^{-\log_2 r}} = o(r)$$

Υπάρχει σύνολο μετρήσιμο $A \subseteq (0,1)$ τ.ώ.

για κάθε διάστημα I

$$m(A \cap I) = \frac{1}{2} m(I).$$