3 σελ 30

$A \,,\; m(A) < \infty$

$$\varphi(x) = m\big(A \cap (x+A)\big) \longrightarrow \varphi \text{ συνεχής}$$

---

$$\varphi(x) = m(A) - \overbrace{m\big(A \setminus (x+A)\big)}^{\psi(x)}$$

$$m\big(A \setminus (x+A)\big) = m\big((x+A) \setminus A\big)$$

$$m\big(A \setminus (x+A)\big) + m\big((x+A) \setminus A\big) = m\big(A \,\Delta\, (x+A)\big) = \int \left| \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{x+A} \right|$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \int \left| \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{x+A} \right| = \frac{1}{2} \int \left| \mathbb{1}_A(t) - \mathbb{1}_A(t-x) \right|$$

$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = \psi(x_0)$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \;\exists$ συνεχής $g$ : $\int \left| \mathbb{1}_A - g \right| < \varepsilon$ .

$$\psi(x) = \int \left| \mathbb{1}_A(t) - \mathbb{1}_A(t-x) \right| = \int \left| \big(\mathbb{1}_A(t) - g(t)\big) + \big(g(t) - g(t-x)\big) + \big(g(t-x) - \mathbb{1}_A(t-x)\big) \right|$$

$$\psi(x_0) = \int \left| \mathbb{1}_A(t) - g(t) + g(t) - g(t-x_0) + g(t-x_0) - \mathbb{1}_A(t-x_0) \right|$$

$$|\psi(x) - \psi(x_0)| = \left| \int |\dots| - |\dots| \right| \leq \int \Big|\, \big|\overset{\alpha}{\underset{x}{\dots}}\big| - \big|\overset{\beta}{\underset{x_0}{\dots}}\big| \,\Big|$$

$$\int |g - \mathbb{1}_A| < \epsilon$$

$$\big| |\alpha| - |\beta| \big| \leq |\alpha - \beta|$$

$$\leq \int \underbrace{|g(t-x) - g(t-x_0)|}_{\leq \varepsilon \text{ όταν } x \text{ κοντά στο } x_0} + \int \underbrace{|g(t-x) - \mathbb{1}_A(t-x)|}_{\leq \varepsilon} + \int \underbrace{|g(t-x_0) - \mathbb{1}_A(t-x_0)|}_{\leq \varepsilon}$$

$$\lim_{x \to x_0} \int \underbrace{|g(t-x) - g(t-x_0)|}_{\substack{\downarrow \; x \to x_0 \\ 0}} = 0$$

$$\underbrace{|g(t-x) - g(t-x_0)|}$$

$\leq \frac{\epsilon}{L}$ αν $|x-x_0| < \delta$

| $A$ | $m(A) < \infty$ |
|---|---|

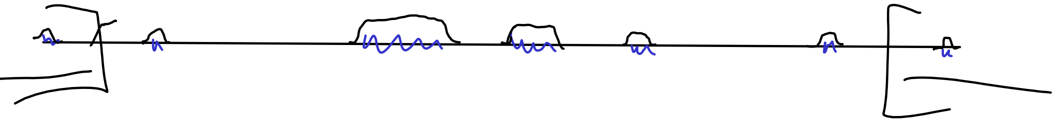
Αν $A$ φραγμένο, $A \subseteq [a,b]$

τότε παίρνουμε και $g : [a,b] \to \mathbb{R}$

οπότε $g$ ομ. συνεχής και

$|g(t-x) - g(t-x_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ αν $\underline{\underline{|x-x_0| < \delta}}$

$\underline{\int |g(t-x) - g(t-x_0)| < \varepsilon}$



Σε κάθε περίπτωση υπάρχει συνεχή $g$ με φραγμένο φορέα τ.ω.

$$\int |g - \mathbb{1}_A| < \varepsilon .$$

$C(\mathbb{R})$ $\quad$ $C_0(\mathbb{R})$ = συνεχείς με φραγμένο φορέα

4 σεπ 30

$m(A \cap (x+A))$ συνεχής ως προς $x$

**Θ. Steinhaus:** $E$ μετρ. $m(E)>0$ τότε

$E - E = \{ e_1 - e_2 : e_1, e_2 \in E \}$ περιέχει

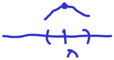
κάποιο $(-\delta, \delta)$ $(\delta > 0)$.

$$y \in E - E \iff \overset{\exists e_1, e_2 \in E}{\wedge}\; y = e_1 - e_2 \iff \overset{\exists e_1, e_2 \in E}{\wedge}\; e_1 = e_2 + y \iff E \cap (E+y) \neq \emptyset$$

$\exists \delta > 0 :$ για $|y| < \delta :$ $E \cap (E+y) \neq \emptyset$

$$\Uparrow$$

$\varphi(0) = m(E) > 0$



$$\varphi(y) = m(E \cap (E+y)) > 0$$

5 σελ. 30 **Λύση** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκλ., $\varepsilon>0$: υπάρχει $E\subseteq[a,b]$ $m(E)<\varepsilon$, και συνεχής $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ τ.ω.

$$f=g \quad \text{στο } E^c.$$

αρκεί μετρήσιμη

---

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μετρ.

$$f_n = f\,\mathbb{1}(|f|\le n) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } |f(x)|\le n \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$g_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής $\quad m\{f_n\neq g_n\}\le \frac{\varepsilon}{2^n}$

$E=\{x:\ \exists n:\ f_n\neq g_n\}$ $\quad m(E)\le\varepsilon$

$g(x)=\lim_n g_n(x)$

$x\notin E \Rightarrow \forall n: f_n(x)=g_n(x) \Rightarrow \exists n_0: n\ge n_0: f(x)=g_n(x)=$ τελικά σταθερή, ίση με $f(x)$

$$m\{|f|>n\} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\exists\, n_0 : \quad m\{|f|>n_0\} \leq \varepsilon$$

$$m\{|f|=+\infty\} = m(\emptyset) = 0$$

$$f_{n_0}(x) = \begin{cases} f(x) & |f|\leq n_0 \\ 0 & |f|>n_0 \end{cases}$$

Lusin

$g(x) = f_{n_0}(x)$ για $x \notin E$, με $m(E) < \varepsilon$

$$E_1 = E \cup \{x : |f(x)| > n_0\} \qquad m(E_1) \leq 2\varepsilon$$

$x \notin E_1$ :

$$\left.\begin{aligned} f_{n_0}(x) &= f(x) \\ f_{n_0}(x) &= g(x) \end{aligned}\right\} \quad x \notin E_1 \Rightarrow f(x) = g(x)$$

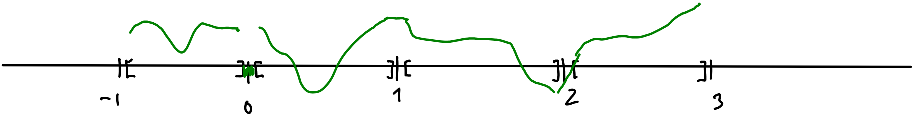
$\boxed{7 \text{ σελ. } 30}$

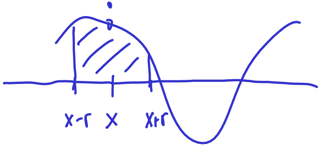
Ισχύει Lusin αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ολοκλ.

Lusin στο ~~$[-n, n]$ : $g_n$ συνεχή στο $[-n,n]$ τ.ώ.~~

~~$m\{ f \neq g_n \text{ στο } [-n,n] \} < \frac{\varepsilon}{2^n}$~~

Lusin στα $\left[ n + \frac{\varepsilon}{10^{|n|}} , \; n+1 - \frac{\varepsilon}{10^{|n|}} \right]$ $\quad n \in \mathbb{Z}$ με $m(E_n) < \frac{\varepsilon}{100^n}$






$$A_r f(x) = \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f(t)\,dt$$

$f$ συνεχής στο $x$ : $\displaystyle A_r f(x) \xrightarrow[r\to 0]{} f(x)$

$f$ ολοκλ. σε κάθε φραγμένο διάστημα (τοπικά ολοκλ.)

Τότε $\quad A_r f \longrightarrow f$ σ.π.

$$A_r(\lambda f + \mu g) = \lambda A_r f(x) + \mu A_r g(x) \quad (\text{γραμμικός})$$

# Μεγιστική συνάρτηση της $f$

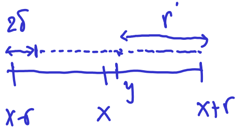
$f$ τοπ. ολοκλ.

$$Mf(x) = \sup_{r>0} A_r|f|(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} |f|$$

**Θ** $Mf$ μετρήσιμη

$\{Mf > \alpha\}$ ανοιχτό : $x : Mf(x) > \alpha$ : $\sup_{r>0} \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} |f| > \alpha$

δηλ. $\exists\, r>0 : \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} |f| > \alpha$




$|x-y|<\delta$

$$\frac{1}{2r'}\int_{y-r'}^{y+r'} |f| \xrightarrow{\delta\to 0} \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} |f| > \alpha$$

$$Mf(x) \overset{\geq}{=} \sup_{\substack{r>0 \\ r\in\mathbb{Q}}} \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r}|f|$$

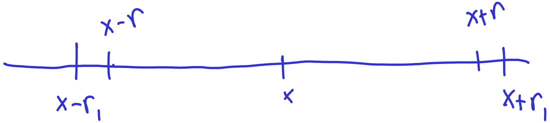
$r<r_1$

$\underset{\text{ρητά}}{r} \to r_1$

$\exists x:$

$$Mf(x) >$$

$$\exists r_1: \quad \frac{1}{2r_1}\int_{x-r_1}^{x+r_1}|f| > \sup_{\substack{r>0 \\ r\in\mathbb{Q}}} \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r}|f|$$



$$\|f\| = \int |f|$$

$\underline{\underline{\Theta}}$ (ασθενούς τύπου ανισότητα για την $Mf$) $f$ ολοκλ.

$$\forall \lambda > 0 : \quad m\{Mf > \lambda\} \leq \frac{3}{\lambda}\|f\|$$

---

$K \subseteq \{Mf > \lambda\}$ αρκεί να δείξουμε $m(K) \leq \dfrac{3\|f\|}{\lambda}$

αρκεί

$\forall x \in K : Mf(x) > \lambda$, $\forall x \in K \ \exists r > 0 \quad \dfrac{1}{2r}\displaystyle\int_{x-r}^{x+r} |f| > \lambda$

$x \in K \to (x-r, x+r) = I_x$

$\bigcup_x I_x \supseteq K \Rightarrow K \subseteq I_{x_1} \cup \dots \cup I_{x_n}$ Αρκεί $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |I_{x_j}| \leq \frac{3\|f\|}{\lambda}$

$\forall x \in K:$ $\quad \dfrac{1}{|I_x|} \displaystyle\int_{I_x} |f| > \lambda \implies \underbrace{|I_x| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{I_x} |f|}$

$K \subseteq I_{x_1} \cup \cdots \cup I_{x_n}$

Αν τα $I_{x_1}, \ldots, I_{x_n}$ <u>ήταν ξένα</u>

$$m(K) \leq |I_{x_1}| + \cdots + |I_{x_n}| \leq \frac{1}{\lambda}\left( \int_{I_{x_1}} |f| + \cdots + \int_{I_{x_n}} |f| \right)$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \int_{\cup I_{x_j}} |f| \leq \frac{\int |f|}{\lambda}$$

$$\boxed{|I_{x_1}|} \geq |I_{x_2}| \geq \dots \geq |I_{x_n}|$$

$I_{x_1}$

Κρατάμε το $I_{x_1}$. Πετάμε τα διαστήματα που το ακουμπάνε. κ.ο.κ

Έτσι επιλέγουμε κάποια ξένα $\boxed{I_1, I_2, \dots, I_k}$

Λήμμα

Αν $|J| < |I|$, $I \cap J \neq \emptyset \Rightarrow J \subseteq (x-3r, x+3r)$ «τριπλάσιο» του $I$

$I = (x-r, x+r)$

## Πόρισμα

$$\bigcup_{j=1}^{k} \text{τριπλάσιο}(I_j) \supseteq K$$

Αν πέταξα το $I_{x_{30}}$ λόγω επαφής με το $I_5$ τότε

$$I_{x_{30}} \subseteq \text{τριπλάσιο}(I_5)$$

$$m(K) \leq |Tp(I_1)| + \dots + |Tp(I_k)| = 3\left(|I_1| + |I_2| + \cdots |I_k|\right)$$

$$\leq 3\,\frac{1}{\lambda}\left(\int_{I_1} |f| + \dots + \int_{I_k} |f|\right)$$

ξένα

$$\leq 3\,\frac{1}{\lambda} \int_{\cup I_j} |f| \leq 3\,\frac{\int |f|}{\lambda} = \frac{3\|f\|}{\lambda}$$