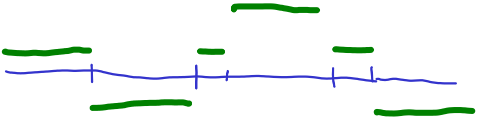
Κλιμακωτή συνάρτηση: $\sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{1}_{I_k}$ $\quad I_k$ διαστήματα



Θ f ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$.

1) $\forall \epsilon > 0$ $\exists$ κλιμακωτή $s(x)$: $\int_{\mathbb{R}} |f - s| < \epsilon$

2) $\forall \epsilon > 0$ $\exists$ συνεχής $g(x)$: $\int_{\mathbb{R}} |f - g| < \epsilon$

1) $f \geqslant 0$, $\epsilon > 0$. $\quad f = \underbrace{f^+}_{} - \underbrace{f^-}_{}$

Υπάρχει απλή συνάρτηση $h(x) \leqslant f(x)$ τ.ώ. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f - h < \epsilon$

$$h(x) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \mathbb{1}_{E_j}(x) \quad , \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad E_j \text{ μετρήσιμα.}$$

Αρκεί να βρούμε για κάθε μετρήσιμο E, με $\underline{m(E) < \infty}$, μια κλιμακωτή $s(x)$:

$$\int |\mathbb{1}_E - s| < \epsilon.$$

E μετρ. $\quad \exists\, G$ ανοιχτό : $G \supseteq E$, $m(G \setminus E) < \epsilon/2$

$$\Downarrow$$

$$m(G) < \infty$$

$$G = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\alpha_j, \beta_j) \qquad 0 \leq \mathbb{1}_E(x) \leq \mathbb{1}_G(x) \leq 1$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\beta_j - \alpha_j) < \infty$$

$$s(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \mathbb{1}_{(\alpha_j, \beta_j)}(x)$$

$$\sum_{j=N}^{\infty} (\beta_j - \alpha_j) < \frac{\epsilon}{10}$$

$$\int |\mathbb{1}_E - s| \leq \int |\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_G| + \underbrace{\int |\mathbb{1}_G - s|}_{\leq \epsilon/10} \leq \epsilon$$

$$\cancel{\int_E} + \int_{G \setminus E} \leq m(G \setminus E) < \epsilon/2$$

2) Θέλω g συνεχή τ.ώ. $\int |f-g| < \epsilon$

Αρκεί να προσεγγίσουμε $s(x) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \mathbb{1}_{I_j}$

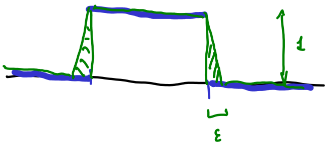
Αρκεί . . — —. την $\mathbb{1}_{I_j}$.

Μπορούμε την g να την πάρουμε να έχει συμπαγή φορέα (μηδενίζεται εκτός ενός διαστήματος)

Αν g_j συνεχής, $\int |g_j - \mathbb{1}_{I_j}| < \dfrac{\epsilon}{J \cdot \max\{|\alpha_j|\}}$ $\quad j=1..J$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j g_j(x)$$

$$\int |s-g| \leq \sum_{j=1}^{J} |\alpha_j| \int |\mathbb{1}_{I_j} - g_j| \leq \varepsilon .$$



Θεώρημα Lusin : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη τότε $\forall \epsilon > 0$ υπάρχει συνεχής $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ τ.ώ.

$$m\{ f \neq g \} < \epsilon.$$

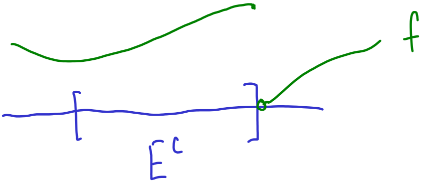
$\exists\, g_n$ συνεχής τ.ώ. $\int |f - g_n| \xrightarrow{n} 0$.

$g_n \xrightarrow{n} f$ κ. μέση τιμή $\Longrightarrow$ $g_n \xrightarrow{n} f$ κατά μέτρο $\Longrightarrow$ Υπάρχει υπακολ. της g_n που συγκλίνει σ.π. στην f

$g_n \xrightarrow{n} f$ σ.π. $\xRightarrow{\text{Egoroff}}$ υπάρχει E, $m(E) < \epsilon$, $g_n \xrightarrow{n} f$ ομοιόμορφα στο E^c.

Αφού g_n συνεχείς, $g_n \to f$ ομ. στο E^c $\Longrightarrow$

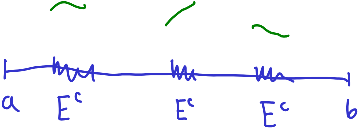
$f\big|_{E^c}$ συνεχής (δεν είναι το ίδιο με το να πούμε f συνεχής σε κάθε $x \in E^c$)



$x_n \in E^c$, $\underbrace{x_n \to x \in E^c}$

$\Downarrow$

$f(x_n) \xrightarrow[n]{} f(x)$



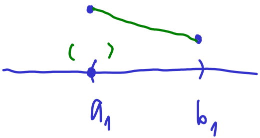
Μπορούμε να υποθ. E^c κλειστό, παίρνοντας ένα μεγάλο κλειστό υποσύνολό του αν όχι.

Λήμμα (Άσκ. 6, σελ. 30) $f : K \to \mathbb{R}$, συνεχής στο K. Τότε

κλειστό

η f έχει συνεχή επέκταση σε όλο το $\mathbb{R}$.

$$K^c = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j)$$



$a_j, b_j \in K$

Μετασχηματισμός Fourier

$$|e^{i\theta}| = 1$$

f ολοκλ. στο $\mathbb{R}$

$f \in \mathbb{C}$ $\qquad f = \overline{f_1} + i\,\overline{f_2}$

$f \in \mathbb{C}$ ολοκλ. $\iff$ $|f|$ ολοκλ.

$$|f_1|, \; |f_2| \leq |f| \leq |f_1| + |f_2|$$

$$\hat{f}(\xi) \overset{\text{ορ.}}{=} \int f(x)\, e^{-2\pi i \xi x}\, dx, \quad |f(x)\, e^{-2\pi i \xi x}| = |f(x)|$$

1 σελ. 30

Λήμμα Riemann - Lebesgue

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$$

Έστω $\epsilon>0$. Υπάρχει κλιμακωτή $s(x) = \sum_{j=1}^{J} c_j \mathbb{1}_{I_j}(x)$ τ.ώ.

$$\int |f - s| < \epsilon \,. \Rightarrow \hat{f}(\xi) = \hat{s}(\xi) + \hat{f}(\xi) - \hat{s}(\xi) = \hat{s}(\xi) + \underbrace{\boxed{\widehat{f-g}(\xi)}}_{\leq \epsilon}$$

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| = \left|\int f(x)\, e^{-2\pi i \xi x} dx\right| \leq \int |f(x)| \qquad |\cdot| \leq \int |f-g| \leq \epsilon$$

$$\widehat{f+g}(\xi) = \hat{f}(\xi) + \hat{g}(\xi)$$

Αρκεί να δείξω το Λήμμα για κλιμακωτή $s(x)$

$$s(x) = \sum_{j=1}^{J} c_j \mathbb{1}_{I_j}(x)$$

$$\hat{s}(\xi) = \sum_{j=1}^{J} c_j \widehat{\mathbb{1}_{I_j}}(\xi) \quad \text{(γραμμικότητα)}$$

Αρκεί: $\widehat{\mathbb{1}_I}(\xi) \xrightarrow[\xi]{} 0$ $\qquad I = (a, b)$

$$\hat{\mathbb{1}}_I(\xi) = \int_a^b e^{-2\pi i \xi x}\, dx = \int_a^b \left(\frac{e^{-2\pi i \xi x}}{-2\pi i \xi} \right)' dx = \frac{e^{-2\pi i b \xi} - e^{-2\pi i a \xi}}{-2\pi i \xi} \xrightarrow[\xi]{} 0$$

2| f ολοκληρώσιμη

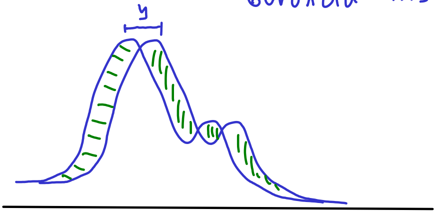
(a) $\int f(x+y)\,dx = \int f(x)\,dx \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$(\tau_y f)(x) = f(x+y)$

$\int |\tau_y f - f|$

(b) $\lim_{y \to 0} \int \left| \overbrace{f(x+y)}^{\tau_y f} - f(x) \right| dx = 0$

συνέχεια της μεταφοράς κατά μέση τιμή



Έστω $\epsilon > 0$. Έστω $s(x)$ κλιμ.

$\int |f - s| < \frac{\epsilon}{10}$.

τρ. αν.

$\int |\tau_y f - f| \leq \overbrace{\int |\tau_y f - \tau_y s|}^{< \epsilon/10} +$

$\int |\tau_y s - s| + \underbrace{\int |s - f|}_{< \epsilon/10}$

$$S(x) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \mathbb{1}_{I_j}(x)$$

$$\tau_y S(x) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \left(\tau_y \mathbb{1}_{I_j}\right)(x) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \mathbb{1}_{I_j - y}(x)$$

$$\mathbb{1}_{I_j}(x+y) \qquad x \in I_j - y$$

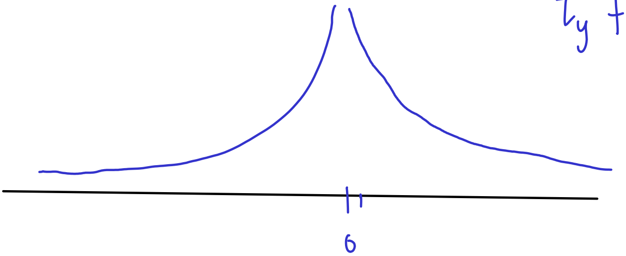
$$x+y \in I_j$$

$$\int |\tau_y S - S| \leq \sum_{j=1}^{J} |\alpha_j| \cdot \underbrace{\int \left| \mathbb{1}_{I_j - y} - \mathbb{1}_{I_j} \right|}_{=2y}$$

Θελουμε $\sum |\alpha_j| \cdot 2y < \epsilon/2 \implies y < \epsilon / 4 \sum |\alpha_j|$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \quad \frac{1}{1+x^2}$ ολοκλ. στο $\mathbb{R}$

$T_y f - f$ μη φραγμένη



$\hat{f}(\xi)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$$\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\left(e^{-2\pi i(\xi+h)x} - e^{-2\pi i \xi x}\right)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x)\, e^{-2\pi i \xi x}\left(e^{-2\pi i h x} - 1\right)}_{\downarrow h\to 0 \atop 0}\, dx$$

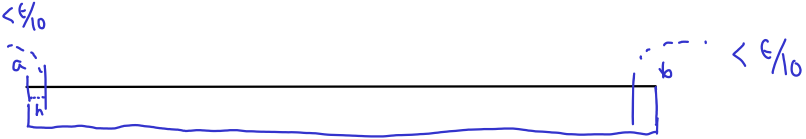
$|\cdot| \leq 2\,|f(x)|$ ΘΚΣ: $\int_{\mathbb{R}} \Big| \longrightarrow 0$

$\hat{f}(\xi)$ ομοιόμ. συνεχής στο $\mathbb{R}$

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \hat{f}(\xi) = 0 \quad , \quad \hat{f} \text{ συνεχής } \forall x \in \mathbb{R}$$

φ συνεχής σε $[a,b]$, τότε ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$.

$$|\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)| < \epsilon \quad \text{αρκεί} \quad |h| < \delta$$



3) $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρ. $m(A) < \infty$,

$$\varphi(x) = m\big(A \cap (x+A)\big)$$

συνεχής

$$m(A) = m\big(A \cap (x+A)\big) + m\big(A \setminus (x+A)\big)$$

$$2\, m\big(A \setminus (x+A)\big) = \int \left| \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{x+A} \right| \xrightarrow{x \to 0} 0$$

$$\shortparallel$$

$$m\big((x+A) \setminus A\big)$$