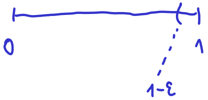
$f_n \to f$

- <u>σχεδόν ομοιόμορφα</u>: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists E,\ m(E) < \varepsilon$, τ.ώ.

στο E^c $f_n \to f$ ομοιόμορφα

$f_n(x) = x^n$, $f(x) = 0$ στο $(0,1)$ $f_n(x) \xrightarrow{σ.ομ.} f(x)$.



στο $[0, 1-\varepsilon]$ ομοιόμ. σύγκλιση

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n \le (1-\varepsilon)^n \to 0$$

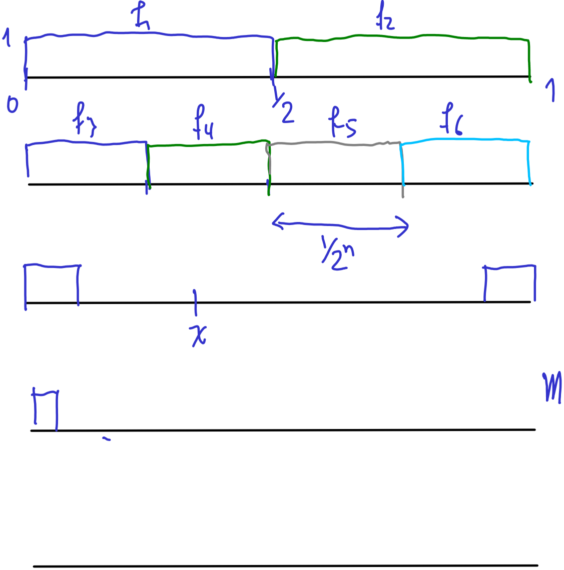
- Σύγκλιση κατά μέτρο

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad m\{|f_n - f| > \varepsilon\} \xrightarrow{n} 0$$

$x^n \longrightarrow 0$ στο $(0,1)$ κατά μέτρο

$$\{|f_n - f| > \varepsilon\} = \{x^n > \varepsilon\} = (\varepsilon^{1/n}, 1)$$

$$m\{|f_n - f| > \varepsilon\} = 1 - \varepsilon^{1/n} \xrightarrow{n} 0$$



Μπορούμε $\overline{\lim_n}\, f_n(x) = +\infty$

πολλαπλασιάζοντας με $2^{n/2}$ στη γενεά n.

$f_n \xrightarrow{\text{κ. μέτρο}} 0 = f$

$m\underbrace{\{|f_n - f| > \varepsilon\}}_{=1/2} \to 0$

$f_n(x) \not\to 0$ για κανένα x

- Σύγκλιση κατά μέση τιμή

$f_n \to f$ κατά μ.τ. στο E αν $\int_E |f_n - f| \xrightarrow{n} 0$

$x^n \to 0$ κατά μ.τ. στο $(0,1)$

$$\int_{(0,1)} x^n = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$$

Θ. Egorov $0 < m(X) \leq \infty$ και $f_n \to f$ σ.π. στο X τότε

$f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα στο X

Μπορούμε να υποθέσουμε παντού σύγκλιση στο X

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists E \subseteq X, \; m(E) < \varepsilon$, τ.ω. $f_n \to f$ ομοιόμορφα $X \setminus E$.

$$E_{n,k} = \bigcap_{j=n}^{\infty} \left\{ |f_j - f| < \frac{1}{k} \right\} \qquad E_{n,k} \uparrow \text{ ως προς } n$$

$$\bigcap_{k} \bigcup_{n} E_{n,k} = \{ x \in X : f_n(x) \to f(x) \}$$

$$\boxed{\forall k \; \exists n : \; x \in E_{n,k}} \iff x \in \bigcap_{k} \bigcup_{n} E_{n,k}$$

$$E_{n,k} = \bigcap_{j \geq n} \left\{ |f_j - f| < \frac{1}{k} \right\}$$

$$\boxed{\bigcap_k \bigcup_n E_{n,k} = X}$$

$x \in E_{n,k}$: $|f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ αρκεί $j \geq n$

$$\left[\forall k \ \exists n : \ j \geq n \Rightarrow |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right] \Leftrightarrow f_n(x) \to f(x)$$

συμπληρώματα μέσα στο X

$$\boxed{\forall k \quad m\left(E_{n,k}^c\right) \xrightarrow{n} 0}$$

$$\forall k : \bigcap_n E_{n,k}^c = \emptyset$$

$$m\left(\bigcap_n E_{n,k}^c\right) = 0$$

Επιλέγουμε n_k τ.ώ.

$$m\left(E_{n_k,k}^c\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Ορίζω $E = \bigcup_k E^c_{n_k, k} \Longrightarrow m(E) \leq \sum_k \frac{\varepsilon}{2^k} \leq \varepsilon$

Δείχνω $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E^c.

Έστω $\delta > 0$ και k_0 τ.ώ. $\frac{1}{k_0} < \delta$.

$x \notin E = \bigcup_k E^c_{n_k, k} \Longrightarrow \forall k \quad x \notin E^c_{n_k, k} \Longrightarrow x \notin E^c_{n_{k_0}, k_0}$

$\Longrightarrow x \in E_{n_{k_0}, k_0}$

$E_{n_{k_0}, k_0} = \bigcap_{j \geq n_{k_0}} \{ |f_j - f| < \frac{1}{k_0} < \delta \}$

Άρα $\forall j \geq n_{k_0} : \quad |f_j(x) - f(x)| < \delta \longleftarrow$ ισχύει για $x \notin E$.

Egorov: σ.π. σύγκλιση $\Longrightarrow$ σ.ομ. σύγκλιση (για X με $m(X)<\infty$)

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,+\infty)}$$

$$f(x) = 0$$

Τότε $\forall x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) \longrightarrow f(x)$

$\{|f_n - f| > 1/2\} = \{f_n \neq f\} = [n,+\infty)$ έχει ∞ μέτρο.

Θ Σχ. ομ. σύγκλιση $\Longrightarrow$ σ.π. σύγκλιση (σε κάθε X)

$f_n \to f$ σ.ομ. στο X

$E = \{ f_n \not\to f \}$ θέλω $m(E) = 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $A \subseteq X$, $m(A) < \varepsilon$, τ.ώ. $f_n(x) \to f(x)$ ομοιόμ. στο A^c, άρα συγκλίνει και $\forall x \in A^c$.

$E \subseteq A \Longrightarrow m(E) \leq m(A) < \varepsilon$, $\forall \varepsilon \Rightarrow m(E) = 0$.

$\underline{\Theta}$ $f_n \to f$ σχ. ομ. ή κατά μ.τ. $\Longrightarrow$ $f_n \to f$ κατά μέτρο

$f_n \to f$ σ. ομ. δηλ. $\forall \delta > 0$ υπάρχει A, $m(A) < \delta$, τ.ώ. $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A^c

Θέλω $\forall \varepsilon > 0$ $m\underbrace{\{|f_n - f| > \varepsilon\}}$ $\xrightarrow{n} 0$.

$\Downarrow$

Για αρκετά μεγάλο

$|f_n - f| \leq \varepsilon$

στο $\underbrace{A^c}$.

Αν n αρκετά μεγάλο

$\underline{m\{|f_n - f| > \varepsilon\}} \leq m(A) < \delta$

δηλ. $m\{|f_n - f| > \varepsilon\} \xrightarrow{n} 0$.

ξένα

αν n αρκ. μεγάλο

$f_n \to f$ κατά μ.τ. $\Longrightarrow$ $f_n \to f$ κ. μέτρο

$\underline{\forall \epsilon > 0}$

$m\{|f_n - f| > \varepsilon\} \xrightarrow{n} 0$

Αν όχι $\exists\, \delta > 0$ και άπειρα n τ.ώ. $m\{|f_n - f| > \varepsilon\} \geq \delta$.

$$\int_X |f_n - f| \xrightarrow{n} 0$$

$$\int_X |f_n - f| \geq \int_{|f_n - f| > \varepsilon} |f_n - f| \geq \int_{|f_n - f| > \varepsilon} \varepsilon$$

$\to 0$

$$= \varepsilon\, m\{|f_n - f| > \varepsilon\}$$

$$\geq \varepsilon \cdot \delta$$

για άπειρα n

(άτοπο)

Υπάρχει f_n, f με $f_n \to f$ κ. μέτρο αλλά όχι σ. ομ.

$f_n \to f$ κ. μέτρο αλλά $f_n(x) \not\to f(x)$ $\forall x$

(Το παράδειγμα με τις περιφερόμενες συναρτήσεις με μειούμενο πλάτος)

Να βρείτε $f_n \to f$ κ. μέτρο αλλά όχι κατά μ.Τ.

$m\{|f_n - f| > \varepsilon\} \xrightarrow{0} 0$ αλλά $\int_X |f_n - f| \not\to 0$

$$f(x) = 0 \qquad f_n(x) = n^2 \mathbb{1}_{(0,\frac{1}{n})}(x)$$

$$\int |f_n - f| = \int f_n = n$$

$$m\{|f_n - f| > \varepsilon\} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

$\underline{\Theta}$ Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο τότε $\exists\, n_k$ $(k=1,2,\dots)$ τ.ώ.

$$f_{n_k} \xrightarrow{k} f \quad \text{σ.π.}$$

Επιλέγουμε για κάθε k το n_k τ.ώστε

$$m\underbrace{\{|f_{n_k}-f| > \tfrac{1}{k}\}}_{E_k} < \frac{1}{2^k} \Longrightarrow m(E_k) < \frac{1}{2^k}$$

$$\Longrightarrow \sum m(E_k) < \infty$$

$$E = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq j} E_k = \limsup E_k \Longrightarrow m(E) = 0.$$

$$x \notin E : \exists j \ \forall k \geq j \ \ x \notin E_k \Longrightarrow \overbrace{\exists j \ \forall k \geq j : \ |f_{n_k}(x) - f(x)| < \tfrac{1}{k}}^{\Longrightarrow\, f_{n_k}(x) \to f(x)}$$

1 σελ. 28

$$\left.\begin{array}{l} f_n \to f \text{ κ. μέτρο} \\ f_n \to g \text{ κ. μέτρο} \end{array}\right\} \to f = g \text{ σ.π.}$$

$$\{f \neq g\} \subseteq \bigcup_k \{|f-g| > \tfrac{1}{k}\} \qquad \forall k \quad m\{|f-g| > \tfrac{1}{k}\} = 0$$

$$|f-g| \leq |f-f_n| + |f_n - g|$$

$$\{|f-g| > \tfrac{1}{k}\} \subseteq \{|f_n - f| > \tfrac{1}{2k}\} \cup \{|f_n - g| > \tfrac{1}{2k}\}$$

$$m\{\ldots\} \leq m\{\ldots\} + m\{\ldots\} \xrightarrow{n} 0$$

2) $\left.\begin{array}{l} f_n \to f \\ g_n \to g \end{array}\right.$ κατά μ. $\Longrightarrow$ $f_n + g_n \longrightarrow f+g$ κατά μ.

$$m\left\{ \left| f_n + g_n - (f+g) \right| > \varepsilon \right\} \xrightarrow{n} 0$$

$$\left| f_n + g_n - (f+g) \right| \leq |f_n - f| + |g_n - g|$$

$$\left\{ \left| f_n + g_n - (f+g) \right| > \varepsilon \right\} \subseteq \left\{ |f_n - f| > \tfrac{\varepsilon}{2} \right\} \cup \left\{ |g_n - g| > \tfrac{\varepsilon}{2} \right\}$$

$$\underset{\downarrow \atop 0}{m\{ \ldots \}} \leq \underset{\to 0}{m\{ \ldots \}} + \underset{\to 0}{m\{ \ldots \}}$$

3)

$$\left.\begin{array}{l} f_n \to f \text{ κατά } \mu: \\ a \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow a f_n \to a f \text{ κατά } \mu.$$

$$\{ |a f_n - a f| > \varepsilon \} = \left\{ |f_n - f| > \frac{\varepsilon}{|a|} \right\}$$

4) $f_n \to f$ κατά μ. $\Longrightarrow$ $|f_n| \to |f|$ κατά μ.

$$\big|\,|\alpha| - |\beta|\,\big| \leq |\alpha - \beta|$$

$$m\Big\{\big|\,|f_n| - |f|\,\big| > \varepsilon\Big\} \leq m\Big\{|f_n - f| > \varepsilon\Big\} \to 0$$

5] $m(X) < \infty$ $\quad f_n \to f$ κατά μέτρο στο X τότε

$f_n^2 \to f^2$ κατά μέτρο στο X.

$$|f_n^2 - f^2| = |f_n - f| \cdot |f_n + f|$$

$\varepsilon > 0$ $\quad A \subseteq X \quad m(A) < \varepsilon$ τ.ώ. f στο $X \setminus A$ φραγμένη.

$$m\{\underbrace{f \leq n}_{E_n \uparrow}\} \to m(X)$$

$\bigcup E_n = \{x : f(x) < \infty\} = X \Rightarrow m(E_n) \to m(X)$

$m(E_n^c) \to 0$

$$|f_n^2 - f^2| = |f_n - f| \cdot |f_n + f|$$

A, $m(A) < \varepsilon$, $X \setminus A$ η f: $|f| \leq M$.

$$m\{|f_n - f| > 1\} \xrightarrow{n} 0$$

$n \geq n_0$: $m\{\underline{|f_n - f| > 1}\} \leq \varepsilon$

Αν $x \notin \{|f_n - f| > 1\} \Rightarrow |f_n| \quad M+1$

Αφαιρώ από το X τα A, $\{|f_n - f| > 1\}$

$|f| \leq M$, $|f_n| \leq M+1$

$\underline{(n \geq n_0)}$

$$|f_n^2 - f^2| > \varepsilon_1 \Rightarrow |f_n - f| > \frac{\varepsilon_1}{3M} \Rightarrow m\{|f_n^2 - f^2| > \varepsilon_1\} \xrightarrow{n} 0$$