1. Διατυπώστε τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου ενός συνόλου πραγματικών αριθμών. Έπειτα δείξτε, χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό αυτό, ότι το εξωτερικό μέτρο κάθε αριθμήσιμου συνόλου είναι 0.

$$E \subseteq \mathbb{R} \qquad m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| : \begin{array}{l} I_j \text{ ανοιχτά διαστήματα} \\ \bigcup I_j \supseteq E \end{array} \right\}$$

$$E = \{ e_1, e_2, \dots \}$$

$$I_j = \left(e_j - \frac{\varepsilon}{2^j}, e_j + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) \qquad \bigcup_1^n I_j \supseteq E$$

$$\sum_1^{\infty} |I_j| = \varepsilon \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^j} = \varepsilon \qquad \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{m^*(E)} \leq \varepsilon, \ \forall \varepsilon$$

2. Έστω Σ εκείνα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που είναι αριθμήσιμα ή τα συμπληρώματα τους είναι αριθμήσιμα. Δείξτε ότι το Σ είναι μια σ-άλγεβρα πάνω στο $\mathbb{R}$.

- $\emptyset, \mathbb{R} \in \Sigma$
- $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$
- $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_1^\infty A_j \in \Sigma$
  - Όλα τα A_j αριθμήσιμα : $\bigcup_1^\infty A_j$ αριθμήσιμο $\in \Sigma$
  - ~~Όλα τα~~ A_1^c αριθμήσιμο $\left(\bigcup A_j\right)^c = \bigcap A_j^c \subseteq A_1^c$ αριθμ.

    Κάποιο

    $\in \Sigma$

3. Ας είναι $E_n \subseteq \mathbb{R}$ μια ακολουθία μετρησίμων συνόλων με $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < \infty$. Ας είναι επίσης A το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών που ανήκουν σε άπειρα από τα E_n. Δείξτε ότι $m(A) = 0$.

$$A \subseteq \bigcup_{k \geq n} E_k \quad \text{για κάθε } n$$

Άρα

$$m(A) \leq m\Big(\bigcup_{k \geq n} E_k\Big) \leq \sum_{k=n}^{\infty} m(E_k) \xrightarrow{n} 0$$

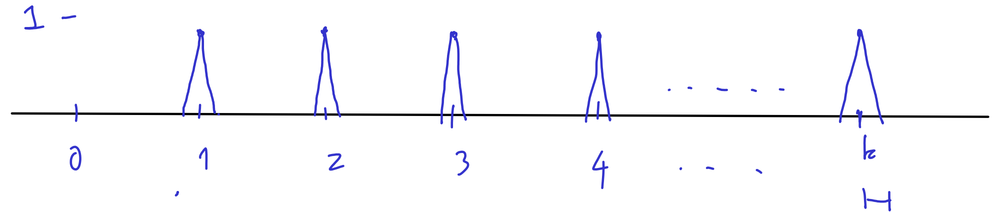
(ουρά συγκλίνουσας σειράς)

$$m(A) = 0$$

4. Σωστό ή λάθος;

Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μη αρνητική και συνεχής παντού και $\int f<\infty$ τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Λάθος



$$\ell_k=\frac{1}{k^2}$$

$$\int f=\sum_{k=1}^{\infty}\ell_k<\infty$$

5. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μη αρνητική και μετρήσιμη και $\int f < \infty$ δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} f = \int f.$$

$$\int_{[-n,n]} f = \underbrace{\int f \, \mathbb{1}_{[-n,n]}}_{f_n \uparrow f} \xrightarrow{\text{ΘΜΤ}} \int f$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f_n(x)$ είναι τελικά $= f(x)$

6. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μη αρνητική και μετρήσιμη και $\int f < \infty$ δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{f>n\}} f = 0.$$

$$\underbrace{\int_{\{f>n\}} f}_{\downarrow \ 0} + \underbrace{\int_{\{f\leq n\}} f}_{\downarrow\ \text{ΘΜΤ} \ \int f} = \int f$$

$$\int_{\{f\leq n\}} f = \int \underbrace{f \mathbb{1}_{\{f\leq n\}}}_{f_n \uparrow f}$$

7. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μη αρνητική και μετρήσιμη και $\int f < \infty$ δείξτε ότι για $n = 1, 2, \dots$

$$m\{f > n\} \leq \frac{C}{n},$$

όπου C μια σταθερά που δεν εξαρτάται από το n (αλλά μπορεί να εξαρτάται από την f).

$$\int f \geq \int_{\{f>n\}} f \geq \int_{\{f>n\}} n = n \cdot m\{f>n\}$$

$$m\{f>n\} \leq \frac{\int f = C}{n}$$

8. Αν $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι μη αρνητική και μετρήσιμη και για $n=1,2,\ldots$ ισχύει

$$m\{f>n\}\leq\frac{1}{n^2},$$

δείξτε ότι $\displaystyle\int_{[0,1]} f<\infty$.

Γράψτε

$$\int_{[0,1]} f=\int_{\{f<1\}} f+\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\int_{\{2^n\leq f<2^{n+1}\}}}\, f$$

$$[0,1]=\{f<1\}\cup\{1\leq f<2\}\cup\{2\leq f<4\}\cup\{4\leq f<8\}\cup\ldots$$

$$\int_{\{f<1\}} f\leq\int_{\{f<1\}} 1\leq\int_{[0,1]} 1=1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{2^n\leq f<2^{n+1}} 2^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}m\{2^n\leq f<2^{n+1}\}\leq\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}m\{2^n\leq f\}$$

$$\leq\underline{\sum_{0}^{\infty}}\, m\{2^{n-1}<f\}\cdot 2^{n+1}$$

$$\leq\sum 2^{n+1}2^{-2(n-1)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}<\infty$$

Βρείτε $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ $\forall x \in (0,1)$: $\underline{\lim} f_n(x) = 0$

$\overline{\lim} f_n(x) = 1$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } n \text{ άρτιο} \\ 1 & \text{αν } n \text{ περιττό} \end{cases}$$

Βρείτε $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ $\forall x \in (0,1)$: $\underline{\lim} f_n(x) = 0$

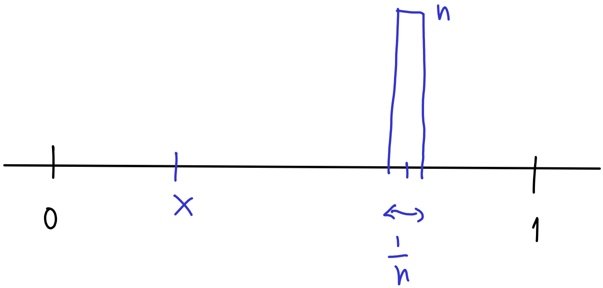
$\overline{\lim} f_n(x) = +\infty$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ n & n \text{ περιττό} \end{cases}$$

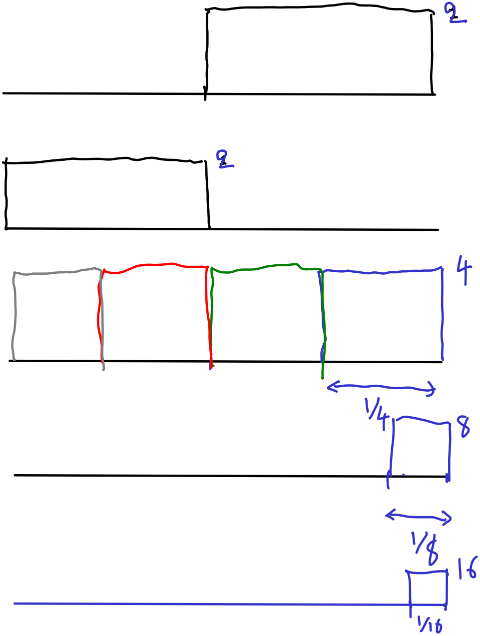
Βρείτε $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ $\forall x \in (0,1)$: $\underline{\lim} f_n(x) = 0$

$\int f_n \leq 1$ $\qquad$ $\overline{\lim} f_n(x) = +\infty$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \\ n \cdot x & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

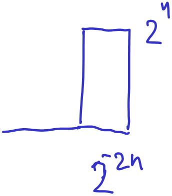


n
0
x
$\frac{1}{n}$
1

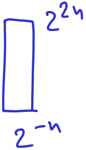


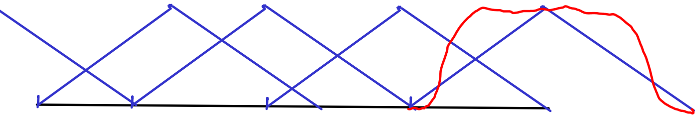
$\oplus$

$$\int f_n \to 0$$



$$\int f_n \to +\infty$$

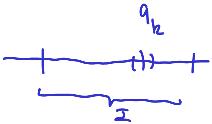




Βρείτε ανοιχτό $G \subseteq \mathbb{R}$ τ.ώ. $m(G) < \epsilon$ και σε κάθε ανοιχτό διάστημα I να έχουμε $m(G \cap I) > 0$.

$$\mathbb{Q} = \{ q_1, q_2, q_3, \dots \}$$

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \Rightarrow m(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} = \varepsilon$$



Βρείτε $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ τ.ώ. $\int f_n \to 0$ αλλά

$\forall x \in [0,1]$ η $f_n(x)$ δε συγκλίνει.

$\underline{\lim} f_n(x) = 0$ $\overline{\lim} f_n(x) = 1$ $\int f_n \to 0$.

---

12 Σεπ. 25 $\quad f$ ολοκληρώσιμη

$$\forall E \in \mathcal{M} : \int_E f = 0 . \quad \text{Τότε} \quad f = 0 \text{ σ.π.}$$

$f \geq 0$ $\quad m\{f > \frac{1}{n}\} = 0 \quad$ αλλιώς $\displaystyle\int_{f > \frac{1}{n}} f \geq \frac{1}{n} m\{f > \frac{1}{n}\}$

$$\{f \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f > \frac{1}{n}\}$$

$$\mathbb{R} = \underbrace{\{f < 0\}}_{E_1} \cup \{f = 0\} \cup \underbrace{\{f > 0\}}_{E_2}$$

$\displaystyle\int_{E_2} f = 0 \Rightarrow f = 0$ σ.π. στο E_2

$\displaystyle\int_{E_1} -f = 0 \Rightarrow f = 0$ σ.π. στο E_1

13) f ολοκλ. $\forall x \in \mathbb{R}$: $\int_{(-\infty,x)} f = 0$. Τότε $f = 0$ σ.π.

1° $\int_{(a,b)} f = 0$ $\quad \int_{(a,b)} f = \int_{-\infty}^{b} f - \int_{-\infty}^{a} f = 0 - 0 = 0$

2° Αν G ανοιχτό $\Rightarrow \int_G f = 0$

$$G = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j) \Longrightarrow \int_G f = \sum_j \int_{(a_j,b_j)} f = 0$$

3° Αν F κλειστό $\Longrightarrow \int_F f = 0$

$$0 = \int_{\mathbb{R}} f = \int_{F^c} f + \int_F f = \int_F f$$

4° Αν K είναι F_σ $\Longrightarrow \int_K f = 0$

$K = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$, F_j κλειστά

$T_n = \bigcup_{j=1}^{n} F_j$ κλειστό

$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ (↑)

$f_n(x) = f(x)\, \mathbb{1}_{T_n}(x)$

$|f_n(x)| \leq |f(x)|$

$f_n(x) \to f(x)$ ΘΚΣ

$$0 = \int_{T_n} f = \int_{T_n} f_n = \int_K f_n \to \int_K f = 0$$

5°

Αν E μετρ. $\Longrightarrow$ $\int_E f = 0$, άρα $f = 0$ σ.π.

(προηγ. άσκ.)

$$E = \underbrace{K}_{F_\sigma} \cup \underbrace{(E \setminus K)}_{m=0}$$

$$\int_E f = \int_K f + \int_{E\setminus K} f$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$\int f \, \mathbb{1}_{(-\infty, n]} = \int_{-\infty}^{n} f = 0 \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f = 0$$

$f \geq 0$

14| $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(α) $\forall t$ η $f(x,t)$ ολοκλ. συνάρτηση του x

(β) $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ υπάρχει παντού $(\forall\, (x,t))$

(γ) $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$, g ολοκληρώσιμη

Τότε $$\frac{d}{dt}\left(\int f(x,t)\,dx\right) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}\int f(x,t)\,dx = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int f(x,t+h)\,dx - \int f(x,t)\,dx\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\int \underbrace{\overbrace{\frac{1}{h}\Big(f(x,t+h) - f(x,t)\Big)}^{\frac{\partial f}{\partial t}(x,\xi)}}_{\downarrow\, h\to 0\ \ \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)}\,dx$$

$t<\xi<t+h$

$$\boxed{\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,\xi)\right| \leq g(x)$$

$$\underset{\text{ΘΚΣ}}{=} \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

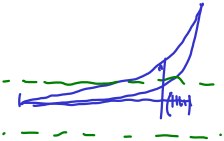
Έννοιες σύγκλισης $f_n \to f$

1) $f_n \to f$ σ.π. (ΣΣΠ)

2) Σχεδόν ομοιόμορφη σύγκλιση $\forall \varepsilon > 0 \ \exists E \subseteq \mathbb{R}$, $m(E) < \varepsilon$

τ.ώ. $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E^c.

$f_n, f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $f(x) = 0$



3) <u>Σύγκλιση κατά μέτρο</u>

$$\forall \delta > 0 \qquad m\{ |f_n - f| > \delta \} \xrightarrow{n} 0$$

$$f_n(x) = x^n \quad , \qquad f(x) = 0$$

$$m\{ x^n > \delta \} = m\{ (\delta^{1/n}, 1) \} = 1 - \delta^{1/n} \longrightarrow 0$$

4) <u>Σύγκλιση κατά μέση τιμή</u> :

$$\int |f_n - f| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$