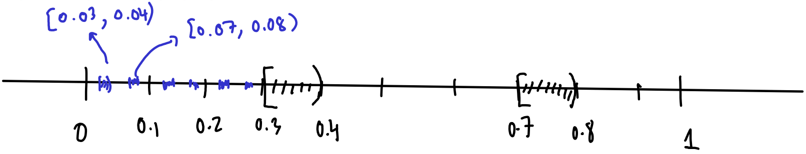
1. Έστω $\boxed{E \subseteq (0,1)}$ το σύνολο όλων των αριθμών του $(0,1)$ που σε κάποια δεκαδική τους αναπαράσταση δεν εμφανίζονται τα ψηφία 3 και 7. Δείξτε ότι $m(E) = 0$.

Το σύνολο είναι πολύ παρόμοιο με το σύνολο του Cantor. Δείξτε, ομοίως, ότι το E περιέχεται σε κάποια σύνολα με οσοδήποτε μικρό μέτρο.



$E \subseteq E_1 = (0, 0.3) \cup [0.4, 0.7) \cup [0.8, 1) \qquad m(E_1) = 0.8$

$E \subseteq E_2 \qquad m(E_2) = 0.8\, m(E_1) = 0.8^2$

$E \subseteq E_3 \qquad [0.02, 0.03)$ πετώ από αυτό

$[0.023, 0.024) \cup [0.027, 0.028)$

$\vdots$

$E \subseteq E_n \quad m(E_n) = 0.8^n \to 0 \implies m(E) = 0$

2. Έστω $E \subseteq (0,1)$ το σύνολο όλων των αριθμών του $(0,1)$ που σε κάποια δεκαδική τους αναπαράσταση δεν εμφανίζονται τα ψηφία 3 και 7 σε άρτια θέση. Δείξτε ότι $m(E) = 0$.

Ενεργήστε όπως στην Άσκηση 1. Θέλει λίγο μεγαλύτερη προσοχή το να κατασκευάσετε τα σύνολα που περιέχουν το E. Εναλλακτικά μπορείτε να δείτε το σύνολό σας σας ένα σύνολο εντελώς παρόμοιο με αυτό της Άσκησης 1 αλλά στο σύστημα αρίθμησης με βάση το 100.

$$x = 0.\boxed{x_1 \; x_2}\,\boxed{x_3 \; x_4}\,\boxed{x_5 \; x_6}$$

όχι 3 ή 7

$$x = (x_k \, x_{k-1} \cdots x_1 \, x_0 \, . \, x_1' \, x_2' \, x_3' \cdots)_b \dashrightarrow \text{Βάση αρίθμησης}$$

$b \in \mathbb{N}, \; b > 1$

$$x = x_k b^k + x_{k-1} b^{k-1} + \cdots + x_1 b + x_0 + x_1' b^{-1} + x_2' b^{-2} + \cdots$$

$$x_j, \; x_j' \in \{0, 1, \dots, b-1\}$$

$$x = (.x_1 x_2 \ldots)_{10} = x_1 10^{-1} + x_2 10^{-2} + x_3 10^{-3} + x_4 10^{-4} + \ldots$$

$$= \underbrace{(\overbrace{10x_1 + x_2}^{y_1})}_{\text{100-αδικό ψηφίο}} \underbrace{10^{-2}}_{(\underbrace{10^2}_{b})^{-1}} + (\overbrace{10x_3 + x_4}^{y_2}) \underbrace{10^{-4}}_{(\underbrace{10^2}_{b})^{-2}} + (\ldots) \underbrace{10^{-6}}_{(\underbrace{10^2}_{b})^{-3}} + \ldots$$

$$= y_1 (10^2)^{-1} + y_2 (10^2)^{-2} + y_3 (10^2)^{-3} + \ldots$$

$$= (.y_1 y_2 \ldots)_{100} \qquad \forall i: \ y_i \notin \{3, 13, 23, \ldots, 93, 7, 17, 27, \ldots, 97\}$$

$E \subseteq E_1 =$ ότι μένει απ' το $(0,1)$ αν πετάξω τα διαστήματα

$$\left.\begin{array}{l} [0.03, 0.04),\ [0.13, 0.14), \ldots \\ [0.07, 0.08),\ [0.17, 0.18), \ldots \end{array}\right\} \text{20 διαστήματα μήκους } 10^{-2}$$

$$m(E_1) = 0.8$$

$E \subseteq E_2 \subseteq E_1$ πετώ $[0.4563, 0.4564)$ $m(E_2) = 0.8^2$

$\vdots$

$$m(E) \leq m(E_n) = 0.8^n.$$

$$m(E) = 0$$

C τριαδικό Cantor $\qquad C \subseteq [0,1]$

E σύνολο, $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda E = \{\lambda e : e \in E\}$

$E + x = \{e + x : e \in E\}$

$$C = \frac{1}{3}C \cup \left(\frac{1}{3}C + \frac{2}{3}\right)$$

αυτοόμοιο

3. Δείξτε ότι το τριαδικό σύνολο Cantor έχει την ιδιότητα ότι για οποιαδήποτε δύο διαφορετικά σημεία του x, y υπάρχει ένα σημείο ανάμεσά τους που δεν ανήκει στο σύνολο Cantor.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε είτε την αναπαράσταση των στοιχείων του συνόλου Cantor στο τριαδικό σύστημα είτε την ίδια την κατασκευή του συνόλου. Η δεύτερη μέθοδος έχει το πλεονέκτημα ότι εφαρμόζεται σε όλες τις κατασκευές τύπου Cantor ενώ η τριαδική αναπαράσταση είναι κάτι που ισχύει μόνο για την συγκεκριμένη κατασκευή. Σκεφτείτε για παράδειγμα αντί να πετάμε το μεσαίο $1/3$ του κάθε διαστήματος να πετάμε ένα διάστημα της μορφής $(x, x+1/3)$ με $x \in (1/10, 1/2)$ το οποίο x να μπορεί να αλλάζει από το ένα βήμα της κατασκευής στο επόμενο. Τότε η ιδιότητα της άσκησης θα εξακολουθεί να ισχύει αλλά δεν υπάρχει κάποια χρήσιμη (τριαδική ή άλλη) αναπαράσταση του συνόλου με βάση τα ψηφία των αριθμών.

$$C = \{ x = (.x_1 x_2 x_3 \dots)_3 \text{ τ.ώ. } x_i \neq 1 \}$$

$x, y \in C$

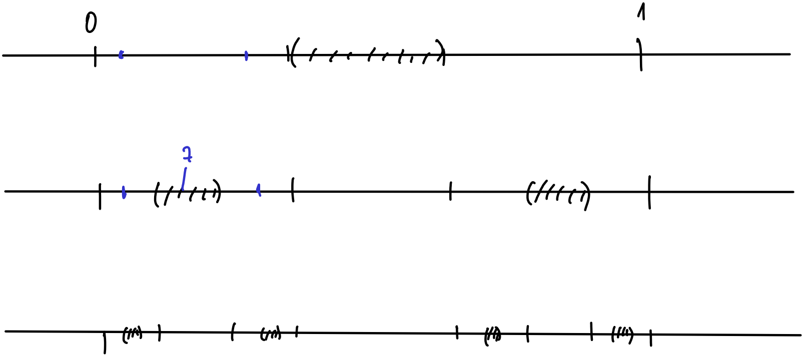
$x \neq y$

$$x = .x_1 x_2 x_3 \dots x_k \overset{=0}{x_{k+1}} x_{k+2} \dots$$

$$\wedge$$

$$y = .y_1 y_2 y_3 \dots y_k \overset{=2}{y_{k+1}} y_{k+2} \dots$$

$$x < z = .x_1 x_2 \dots x_k 1 1 0 \dots < y$$



$x < y$

$x, y \in C$

Υπάρχει ένα στάδιο της κατασκευής όπου τα x, y διαχωρίζονται

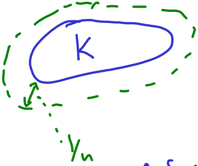
Αλλιώς θα ίσχυε $y - x \le \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $\forall n$, άτοπο

γιατί $y > x$.

4. Ας είναι K ένα συμπαγές σύνολο και έστω $O_n = \{x \in \mathbb{R} : \text{dist}\,(x, K) < \frac{1}{n}\}$. Δείξτε ότι $\underline{m(O_n)} \to \underline{m(K)}$.

Το O_n είναι ένα ανοιχτό σύνολο. Δείξτε ότι $\underline{m(O_1) < \infty}$ και ότι $\boxed{K = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n}$.

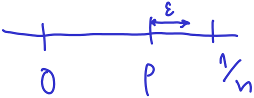
$$\text{dist}(x, K) = \inf\{ d(x,y) : y \in K \}$$



O_n ανοιχτό

$x \in O_n$ θέλω $\varepsilon > 0$ τ.ώ.

$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq O_n$



$0 < \varepsilon < \frac{1}{n} - p$

$p = \text{dist}(x, K) < \frac{1}{n}$

$z \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ θέλω $\text{dist}(z, K) < \frac{1}{n}$. Έστω $y \in K$

$|z-y| \leq |z-x| + |x-y| < \varepsilon + p < 1/n$

$$\underbrace{K = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n} \qquad K \subseteq O_n \Rightarrow K \subseteq \bigcap O_n$$

$\supseteq$: Έστω $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ $\qquad dist(x, K) < \frac{1}{n}, \quad \forall n$

άρα $\underbrace{dist(x, K) = 0}$

άρα $x \in K$. $\qquad y_n \to x \in K$ αφού K κλειστό $\qquad \inf\{|x-y| : y \in K\} = 0$

Παίρνω $\overbrace{|y_n - x| < \frac{1}{n}}$ $(y_n \in K)$ $\qquad |x-y|$, $y \in K$, μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό

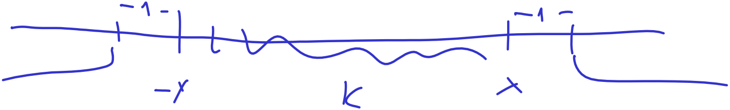
~~y_n έχουν συγκλίνουσα υπακ.~~

$\cancel{y_n \to y \in K \Rightarrow dist(x, y) = 0}$

$\underline{m(O_1) < \infty}$

K συμπαγές $\Rightarrow$ φραγμένο, δηλ. $K \subseteq [-x, x]$

$\Rightarrow O_1 \subseteq [-x-1, x+1] \Rightarrow m(O_1) \leq 2(x+1) < \infty$



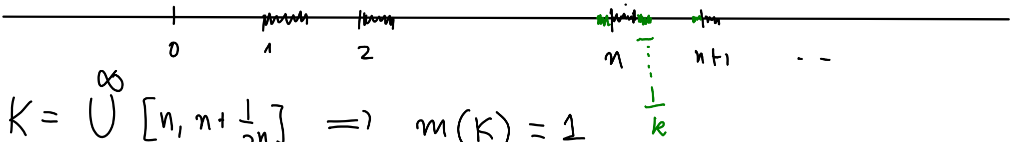
$$\left.\begin{array}{l} \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = K \\ m(O_1) < \infty \end{array}\right| \Rightarrow \quad m(K) = \lim_n m(O_n)$$

5. Δείξτε ότι το αποτέλεσμα της Άσκησης 4 δεν ισχύει αναγκαστικά αν το K είναι κλειστό αλλά όχι φραγμένο ή αν το K είναι φραγμένο και ανοιχτό.

💡 Για το πρώτο φτιάξτε ένα σύνολο που να είναι μια ακολουθία μικρών διαστημάτων που «πάνε» στο άπειρο. Για το δεύτερο πάρτε ένα ανοιχτό διάστημα κατάλληλου μήκους γύρω από κάθε ρητό του $(0,1)$.

$m(O_n) \not\to m(K)$

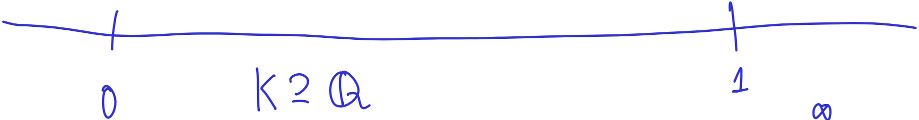
$[n, n+\frac{1}{2^n}]$ $n=1,2,\dots$



$$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n+\tfrac{1}{2^n}] \Rightarrow m(K) = 1$$

$m(\underline{O_k}) = \infty$ γιατί περιέχει διάστημα μήκους $\frac{1}{k}$ σε κάθε διάστημα $[n, n+1)$, $n=1,2,\dots$

$$\mathbb{Q} \cap (0,1) = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$$



$K \supseteq \mathbb{Q}$

$$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{10^n},\ q_n + \frac{1}{10^n}\right) \longrightarrow m(K) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^n} < 1$$

$$O_k = \left\{x : \operatorname{dist}(x, K) < \frac{1}{k}\right\} \supseteq (0,1)$$

např $\mathbb{Q} \cap \left(x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right)$

$$\underline{x \in (0,1)} \Rightarrow x \in O_k \Leftrightarrow \exists\, y \in K : |x-y| < \frac{1}{k} \Leftarrow \exists\, q_j \in \mathbb{Q} : |x - q_j| < \frac{1}{k}$$

6. Ας είναι $E_n \subseteq \mathbb{R}$ μια ακολουθία μετρησίμων συνόλων με $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < \infty$. Ας είναι επίσης A το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών που ανήκουν σε άπειρα από τα E_n. Δείξτε ότι $m(A) = 0$.

Έχουμε δει το σύνολο $\boxed{A = \limsup_n E_n}$ στο πρώτο Φυλλάδιο ασκήσεων και το πώς αυτό γράφεται με συνολοθεωρητικές πράξεις. Χρησιμοποιήστε αυτή την αναπαράσταση και το ότι η σειρά στην υπόθεση συγκλίνει (άρα η ουρά της $\sum_{k \geq n} m(E_k)$ τείνει στο 0 για $n \to \infty$).

$m(A)=0 \iff$ σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$ ανήκει σε πεπερασμένα μόνο από τα E_n

$$\limsup E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \right]}_{A_n} \implies A \subseteq A_n, \ \forall n$$

A ''

$$m(A) \leq m(A_n), \ \forall n$$

$$m(A_n) = m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} m(E_k) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

άρα $m(A) = 0$.

7. Ας είναι $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση και $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Δείξτε ότι το σύνολο $\{f = a\}$ είναι μετρήσιμο.

Γράψτε το σα μια αριθμήσιμη τομή συνόλων που ξέρουμε ότι είναι μετρήσιμα. Χειριστήτε διαφορετικά την περίπτωση $a = \pm\infty$.

$\{f > x\}$ μετρήσιμα $(x \in \mathbb{R})$

$$\{f = a\} = \bigcap_n \left\{a - \tfrac{1}{n} < f(x) < a + \tfrac{1}{n}\right\} = \bigcap_n \left\{f > a - \tfrac{1}{n}\right\} \cap \left\{f < a + \tfrac{1}{n}\right\}$$

$a \in \mathbb{R}$

$a = +\infty$ $\qquad \{f = +\infty\} = \bigcap_n \{f > n\}$

$a = -\infty$ $\qquad \{f = -\infty\} = \bigcap_n \{f < -n\}$

8. Δείξτε ότι η σχέση «$f = g$ σχεδόν παντού» είναι μια σχέση ισοδυναμίας πάνω στις (όχι αναγκαστικά μετρήσιμες) συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$.

Απλά επαληθεύστε τα αξιώματα μιας σχέσης ισοδυναμίας. Μόνο η μεταβατική ιδιότητα θέλει λίγη σκέψη.

$f = g$ σ.π. $\overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ μετρ. $E \subseteq \mathbb{R}$, $m(E) = 0$, τ.ώ. $\forall x \in E^c$: $f(x) = g(x)$

- $f = f$ σ.π.
- $f = g$ σ.π. $\Longleftrightarrow$ $g = f$ σ.π.
- $\underbrace{f = g \text{ σ.π.}}_{E_1}$, $\underbrace{g = h \text{ σ.π.}}_{E_2}$ $\Longrightarrow$ $f = h$ σ.π.

$x \notin E_1^c \cap E_2^c = (\overset{\text{μέτρο } 0}{E_1 \cup E_2})^c$

9. Ας είναι $E_n \subseteq \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα και $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι η συνάρτηση

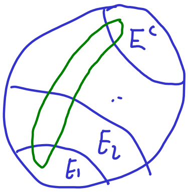
$$f(x) = f_n(x) \text{ αν } x \in E_n \text{ ,0 αν } x \notin \bigcup_n E_n,$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \underbrace{\bigcup E_n}_{E} \\ f_n(x) & x \in E_n \\ \cdots & \end{cases}$$

είναι μετρήσιμη.

Διασπάστε το σύνολο $\{f > \alpha\}$ στα διάφορα E_n.

$$\mathbb{1}_{\{f > \alpha\}} = \left(\sum \mathbb{1}_{E_n} + \mathbb{1}_{E^c} \right) \mathbb{1}_{\{f > \alpha\}} =$$



$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_n} \mathbb{1}_{\{f > \alpha\}} + \mathbb{1}_{E^c} \mathbb{1}_{\{f > \alpha\}}$$

$$\{f > \alpha\} = \left(E^c \cap \{f > \alpha\} \right) \,\dot{\cup}\, \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} \left(E_n \cap \{f_n > \alpha\} \right)$$

$\alpha \leq 0$: E^c

$\alpha > 0$: $\emptyset$

10. Ας είναι f μια μετρήσιμη συνάρτηση στο $[0,1]$ που είναι σχεδόν παντού πεπερασμένη. Δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα $M > 0$ τ.ώ. $m\{|f| > M\} < \epsilon$.

Αν όχι δείξτε ότι $m\{|f| = \infty\} > 0$.

$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, M > 0 \qquad m\{|f| > M\} \geq \varepsilon$

$M = 1, 2, 3, \ldots$

$m\{|f| > 1\} \geq \varepsilon$

$m\{|f| > 2\} \geq \varepsilon$

$\vdots$

$m\{|f| = +\infty\} =$

$= m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{|f| > n\} \right)$

$= \lim_n m\{|f| > n\} \geq \varepsilon$

11. Ας είναι f_n μια ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων που είναι πεπερασμένες σχεδόν παντού. Δείξτε ότι υπάρχει μια ακολουθία $c_n > 0$ τ.ώ.

$\nexists \varepsilon: f_n(x) \geq \varepsilon c_n$ για άπειρα n $$\frac{f_n(x)}{c_n} \to 0 \text{ σχεδόν παντού.}$$ στο $[0,1]$

Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 10 με κατάλληλα επιλεγμένο M για κάθε f_n. Έπειτα χρησιμοποιήστε την Άσκηση 6.

Άσκ. 10 :

$$m\{f_n > \underset{\substack{\wedge\!\wedge \\ n}}{M_n}\} \leq \frac{1}{2^n} \Rightarrow \sum_n m\underbrace{\{f_n > M_n\}}_{E_n} < \infty$$

$$m\{x : f_n(x) > M_n \text{ για άπειρα } n\} = 0$$

6. $\forall x$ $f_n(x)$ τελικά θα είναι $\leq M_n$ $\Big|$ $\Rightarrow$ σ$\forall x$ $\frac{f_n(x)}{n M_n}$ τελικά $\leq \frac{1}{n}$ $\downarrow$ 0

$c_n = n M_n$