Υπάρχουν σύνολα που δεν είναι μετρήσιμα

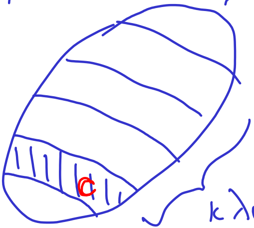
$$\mathbb{R} \supseteq \mathbb{Q}$$

αριθμήσιμο, πυκνό

υποομάδα

υπεραριθμήσιμο

$\mathbb{R}, \sim$



κλάσεις ισοδυναμίας

$x, y \in C \iff x \sim y$

Σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{R}$

$$x \sim y \overset{\text{ορ.}}{\iff} x - y \in \mathbb{Q}$$

- $x \sim x$
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
- $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$

$$x - z = x - y + y - z$$

Κλάσεις ισοδ. του x: $x+\mathbb{Q} = \{x+q : q\in\mathbb{Q}\}$

υπεραριθ. στο πλήθος κλάσεις

$$x\sim y \iff y\in x+\mathbb{Q}$$

$$\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2/3} = \mathbb{Q}$$

$$\overline{\sqrt{2}} = \sqrt{2}+\mathbb{Q}$$

$N = \{$ παίρνουμε ένα στοιχείο από κάθε κλάση της $\sim \}$

δεν είναι μετρήσιμο

ξένη

$$\dot{\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}}} \nu + \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

διαμέριση του $\mathbb{R}$ σε κλάσεις ισοδυναμίας

$$\left.\begin{array}{l} \nu_1 \neq \nu_2 \\ \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N} \end{array}\right\} (\nu_1 + \mathbb{Q}) \cap (\nu_2 + \mathbb{Q}) = \emptyset$$

$x \in \mathbb{R}$

$x \in x + \mathbb{Q}$

$\exists\, \nu \in \mathbb{N} : \nu \in x + \mathbb{Q}$

$x \in x + \mathbb{Q} = \underline{\nu + \mathbb{Q}}$ $\Rightarrow$

$\nu_1 + q_1 = \nu_2 + q_2$ αν τέμνονται

$\nu_1 - \nu_2 = q_2 - q_1 \in \mathbb{Q}$

$\nu_1 \sim \nu_2 \Rightarrow$ ανήκουν στην ίδια κλάση

Έστω N μετρήσιμο.

Μπορεί $\cancel{m(N)=0}$;

$V_1+q_1=V_2+q_2 \Rightarrow$

$V_1-V_2=q_2-q_1 \Rightarrow V_1\sim V_2$

$\Rightarrow V_1=V_2$

$$\mathbb{R}=\bigcup_{\nu\in N}\underbrace{\nu+\mathbb{Q}}=\{\nu+q:\nu\in N,\ q\in\mathbb{Q}\}$$

$$\mathbb{R}=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} N+q$$

$m(N)=0$

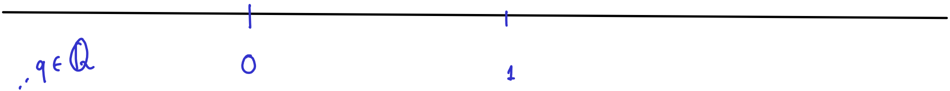
$m(N+q)=0$

$$m(\mathbb{R})=\sum_{q\in\mathbb{Q}} m(N+q)=0$$ άτοπο γιατί $m(\mathbb{R})=+\infty$

Αν N μετρήσιμο τότε $m(N) > 0$.

Τότε υπάρχει διάστημα I μήκους 1 τ.ώ. $m(N \cap I) = \underline{c} > 0$.

N έχει μέτρο $c > 0$



$q + N$. ξένες μεταξύ τους άρα και $q + (N \cap I)$ μεταξύ τους ξένα

$$q \in (0,1) \Rightarrow q + (N \cap I) \subseteq (0,2)$$

$$\sum m(N \cap I) = +\infty$$ άτοπο

$$(0,2) \supseteq \bigcup_{q \in (0,1) \cap \mathbb{Q}} q + (N \cap I) \Rightarrow \underbrace{m((0,2))}_{2 =} \geq \sum_{q \in (0,1) \cap \mathbb{Q}} m(q + (N \cap I))$$

Θεώρημα (Steinhaus) $E \subseteq \mathbb{R}$, μετρ., $m(E) > 0$

Τότε $E - E = \{ e_1 - e_2 : e_1, e_2 \in E \}$ περιέχει ένα ανοιχτό διάστημα $(-\delta, \delta)$.

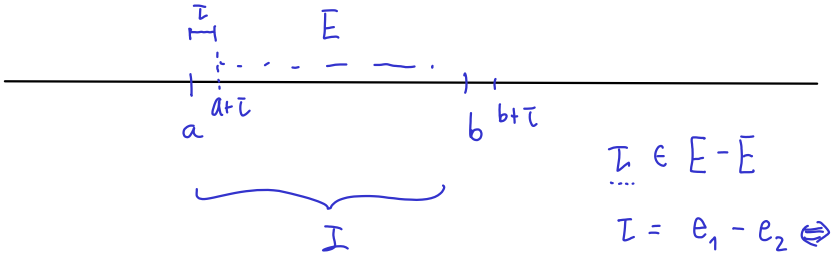
Άσκ $m(E) > 0$ τότε υπάρχει I τ.ω. $m(E \cap I) \geq 0.9\, m(I)$

$$m(E) = \inf_{\substack{\text{καλύψεις} \\ \bigcup I_n \supseteq E}} \overbrace{\sum_n |I_n|}^{\leq 1.001\, m(E)} \qquad E \subseteq \bigcup_n (E \cap I_n)$$

$$m(E) \leq \sum_n m(E \cap I_n) \leq \sum_n 0.9\, |I_n|$$

$$= 0.9 \left(\sum_n |I_n| \right) \leq 0.9 \times 1.001 \times m(E) < m(E)$$

$E \qquad m(E) \qquad m(I \cap E) \geq 0.9\,|I|$



$\tau \in E - E$

$\tau = e_1 - e_2 \Leftrightarrow \tau + e_2 = e_1$

$(I \cap E) - (I \cap E) \supseteq (-\delta, \delta)$

$\subseteq$

$E - E$

$E \cap (\tau + E) \neq \emptyset$

Η άρνηση αυτού που θέλω είναι:

Για κάθε $\delta > 0$ $\exists\, \tau \in (-\delta, \delta)$ τ.ώ.

$$E \cap (\tau + E) = \emptyset$$

όσο μικρό θέλω

$$m\big(\underbrace{E \cup (\tau + E)}_{\subseteq [a,\, b+\tau]}\big) = m(E) + m(\tau + E) = 2\, m(E) \geq 2 \cdot 0.9 \cdot |I|$$

$$= 1.8\, |I|$$

Επιλέγω $\delta < 0.5(b-a)$, άρα $0 < \tau < 0.5(b-a)$

$$\subseteq [a,\, b + 0.5(b-a)] \dashrightarrow m = 1.5\, |I|$$

Ολοκλήρωμα Lebesgue

για όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις

Πρώτα για κάθε μη αρνητική μετρήσιμη

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{+\infty\}$$

f απλή $\iff$ όταν $f(\mathbb{R})$ πεπερασμένο σύνολο

(παίρνει πεπερασμένες σε πλήθος διαφορετικές τιμές)

$$f(\mathbb{R}) = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

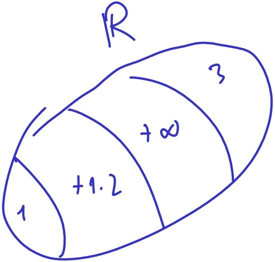
$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j \, \mathbb{1}_{\underbrace{\{f=v_j\}}_{E_j \text{ ξένα}}}(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j \, \mathbb{1}_{E_j}(x)$$

$\chi_A(x)$

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$0 \le f(x) = \sum_{j=1}^{n} \overset{\in \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{+\infty\}}{v_j}\, \mathbb{1}_{E_j}(x) \qquad \text{απλή}$$

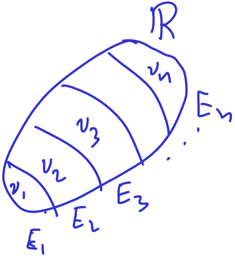
απλή συνάρτηση = πεπερ. γραμμικός συνδυασμός από χαρακτηριστικές συναρτήσεις



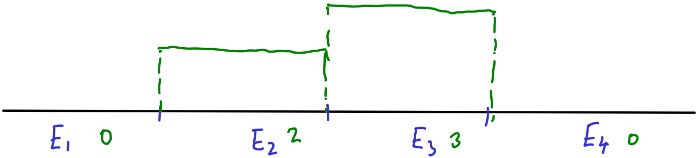
$0 \cdot \infty = 0$

Ολοκλήρωμα μιας απλής συνάρτησης

$$0 \le f(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j \, \mathbb{1}_{E_j}(x)$$

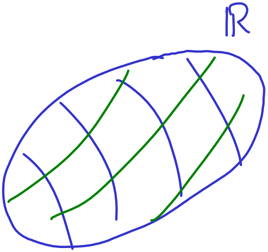


$$\int f \overset{\text{ορ.}}{=} \sum_{j=1}^{n} v_j \, m(E_j)$$



$$0 \leq f = \sum_{j=1}^{n} v_j \mathbb{1}_{E_j} = \sum_{k=1}^{m} c_k \mathbb{1}_{A_k}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} v_j \, m(E_j) = \sum_{k=1}^{m} c_k \, m(A_k)$$



$$E_j \cap A_k$$

$\boxed{\sum_{j=1}^{n} v_j \, m(E_j)}$ μπορούμε να υποθέσουμε $E_i \cap E_j = \emptyset \quad i \neq j$

$E_i \cap E_j$

$f(x) = 3 \cdot \mathbb{1}_{E_1} + 5.5\,\mathbb{1}_{E_2} + 2\,\mathbb{1}_{E_3}$

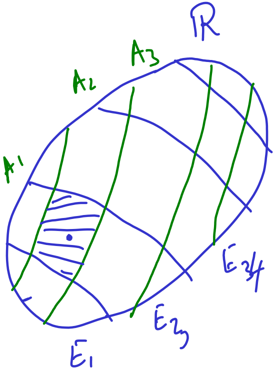
$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j \, \mathbb{1}_{E_j}$$

$(v_1+v_2+v_3) \cdot \mathbb{1}_{\underbrace{E_1 \cap E_2 \cap E_3}}$

$(v_1+v_2)\, \mathbb{1}_{E_1 \cap E_2 \cap E_3^c}$

$\underline{E_1^* \cap E_2^* \cap \cdots \cap E_n^*}$

$* = c$ ή τίποτα



$$\sum v_j\, m(E_j) = \sum c_k\, m(A_k)$$

$$m(E_j) = m(E_j \cap A_1) + \dots + m(E_j \cap A_m)$$

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \sum_{j=1}^{n} \underbrace{m(E_j \cap A_k)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{k=1}^{m} \underbrace{m(E_j \cap A_k)}$$

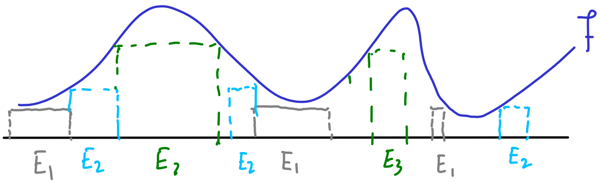
$\forall j, k$ με $m(E_j \cap A_k) > 0$: $v_j = c_k$

Γιατί αν $x \in E_j \cap A_k$ τότε $f(x) = v_j$ (αφού $x \in E_j$) αλλά και $f(x) = c_k$ (αφού $x \in A_k$), άρα $c_k = v_j$

$\underbrace{\text{Απλές}}$ $\longrightarrow$ $\underbrace{\text{Μη αρνητικές}}$

$f \geqslant 0$

<u>Ορ</u> $\displaystyle \int f = \sup \left\{ \int s \ : \ \begin{array}{l} 0 \leqslant s(x) \leqslant f(x), \ \forall x \\ s(x) \text{ απλή συνάρτηση} \end{array} \right\}$



Αν $0 \leq f$ απλή τότε

$$\underbrace{\int f}_{1^{ος}\text{ ορισμός}} \overset{\overset{\text{εύκολο}}{\leqslant}}{=} \sup \Big\{ \underbrace{\int s}_{2^{ος}\text{ ορισμός}} : 0 \leq s(x) \leq f(x),\ s \text{ απλή} \Big\}$$

Έστω $0 \leq s(x) \leq f(x)$ με $\underline{\int s > \int f}$

$$\left.\begin{aligned} s(x) &= \sum v_j \mathbb{1}_{E_j}(x) \\ f(x) &= \sum c_k \mathbb{1}_{A_k}(x) \end{aligned}\right\}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ίδια σύνολα E_j, A_k

$$\left.\begin{aligned} s(x) &= \sum v_j \mathbb{1}_{E_j} \\ f(x) &= \sum c_j \mathbb{1}_{E_j} \end{aligned}\right\} \quad v_j \leq c_j \Rightarrow \underbrace{\sum v_j m(E_j)}_{\int s} \leq \underbrace{\sum c_j m(E_j)}_{\int f}$$

$s_1(x),\ s_2(x)$ απλές, ≥ 0

$$\int s_1 + s_2 = \int s_1 + \int s_2 \ \checkmark$$

s_1 παίρνει τιμές $v_1 \dots v_n$

s_2 - - - - - $w_1 \dots w_m$

Θέτω $E_{j,k} = \{ s_1 = v_j ,\ s_2 = w_k \}$ → διαμέριση του $\mathbb{R}$

$j = 1 \dots n,\ k = 1 \dots m$

$$s_1(x) = \sum_{j,k} v_j \mathbb{1}_{E_{j,k}} \qquad \sum v_j m(E_{jk})$$

$$s_2(x) = \sum_{j,k} w_k \mathbb{1}_{E_{j,k}} \qquad \sum w_k m(E_{jk})$$

$$s_1(x) + s_2(x) = \sum_{j,k} (v_j + w_k) \mathbb{1}_{E_{j,k}}$$

$$\sum_{j,k} (v_j + w_k)\, m(E_{j,k})$$

$$\int f_1 + f_2 \;\overset{\geq}{\underset{\leq}{=}}\; \int f_1 + \int f_2 \qquad f_1, f_2 \geq 0$$

$$\int f_1+f_2 = \sup_{s \leq f_1+f_2} \int s, \qquad \int f_1 = \sup \int s_1, \qquad \int f_2 = \sup \int s_2$$

Επόμενη φορά

$$\left.\begin{array}{l} s_1 \leq f_1 \\ s_2 \leq f_2 \end{array}\right\} \quad \underbrace{s_1 + s_2} \leq f_1 + f_2$$

Επιλέγω s_1 τ.ώ. $\int s_1 \geq \int f_1 - \varepsilon$

s_2 . . $\int s_2 \geq \int f_2 - \varepsilon$

$$\int s_1 + s_2 = \int s_1 + \int s_2 \geq \overline{\int f_1 + \int f_2} - 2\varepsilon$$