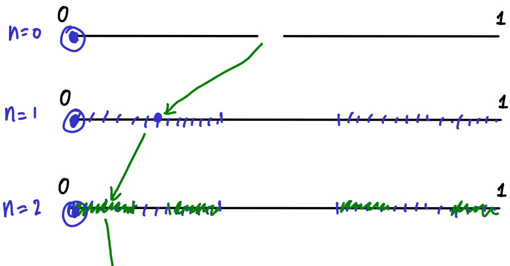
Σύνολο Cantor $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ <u>συμπαγές</u> σύνολο

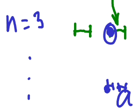


C_0 $0 \le m(C) \le m(C_n) \quad \forall n$

$\dots$

C_1 $= 2^n \frac{1}{3^n} \to 0$

C_2 $\Rightarrow m(C) = 0$



C υπεραριθμήσιμο

ακολουθία από L, R

LLRL.... $\longrightarrow$ ένα σημείο του συνόλου Cantor

ακολουθία $\underline{x_n} \in C_n \longrightarrow x$

$x_1 \in C_1$

$x_2 \in C_2 \subseteq C_1$

$x \in C_1 \longleftarrow x_1, x_2, x_3 \dots \in C_1$

$x \in C_2 \longleftarrow x_2, x_3, x_4 \dots \in C_2$

$x \in C_3 \longleftarrow x_3, x_4, \dots \in C_3$

$x \in \bigcap C_n = C$

σε κάθε $\underline{LLRL}\ldots$ αντιστοιχεί $x \in C$

$$\left[\begin{array}{l} LL\underbrace{RR\ldots\ldots}_{R} \to 1/3 \\ \\ RLLL\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$(0,1)$

$\Downarrow$

$L \to 0$

$R \to 2$

$x = .x_1 x_2 x_3 \ldots\ldots \to x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 3^{-j}$

$x_j \in \{0,1,2\}$

$$\sum_{j=2}^{\infty} 2 \cdot 3^{-j} = 2 \frac{1}{3^2} \sum_{j=0}^{\infty} 3^{-j}$$

$$= \frac{2}{3^2} \frac{1}{1-1/3} = \frac{2}{3^2} \frac{3}{2} = \frac{1}{3}$$

$.19999 = .2000\ldots$ (10-δικό)

$.0222\ldots = .\underbrace{1}0000\ldots$

$$\left.\begin{aligned} x &= (.x_1 x_2 x_3 \dots)_3 \\ &\quad\ \ \ne \\ x &= (.y_1 y_2 y_3 \dots)_3 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j 3^{-j} \\ x &= \sum_{j=1}^{\infty} y_j 3^{-j} \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j 3^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty} y_j 3^{-j}$$

Έστω k η πρώτη θέση όπου $x_j \neq y_j$

$$\sum_{j=k}^{\infty} x_j 3^{-j} = \sum_{j=k}^{\infty} y_j 3^{-j} \qquad x_k > y_k$$

$x_k = y_k + 1$

$$(x_k - y_k)\, 3^{-k} = \sum_{j=k+1}^{\infty} (y_j - x_j)\, 3^{-j} \overset{|\cdot|}{\leq} \sum_{j=k+1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-j} = \frac{2}{3^{k+1}} \sum_{j=0}^{\infty} 3^{-j} \leq \frac{2}{3^{k+1}} \frac{3}{2} = \frac{1}{3^k}$$

3^{-k} ή $\boxed{2 \cdot 3^{-k}}$

Για κάθε $x \in (0,1)$ υπάρχουν το πολύ 2 αναπαραστάσεις στο 3-αδικό σύστημα.

Για να έχει ένα x διπλή αναπαράσταση πρέπει να είναι της μορφής

$$x = .\overbrace{x_1 x_2 \dots x_k}^{a \in \mathbb{N}} 000 \dots\dots$$

$$= a \frac{1}{3^k} \qquad a \in \{0, 1, 2, \dots, 3^k - 1\}$$

∴ Αριθμήσιμα στο πλήθος $x \in (0,1)$ έχουν διπλή αναπαράσταση.

$$x \in C$$

$$\nearrow \qquad \nwarrow$$

LRRL.. LLR...

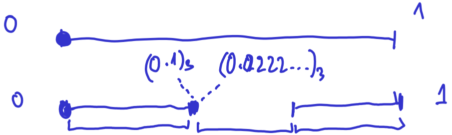
$0.0220\dots$ $0.002\dots$

$L \longrightarrow 0$ $\qquad \rightarrow 0.\dots a\,0000$, $a \neq 0$

$R \longrightarrow 2$ $\qquad \rightarrow 0.\dots (a-1)\,2222\dots$

$$x = (.LRRL\dots)_3$$

$$x \in C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$



$0.1xxxxxx$

$x \in C \iff$ το x έχει κάποιο τριαδικό ανάπτυγμα χωρίς 1.

$C \underset{\text{επί}}{\overset{1-1}{\longleftrightarrow}}$ ακολουθίες από LRR...

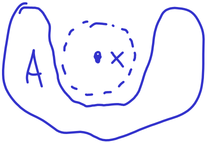
C υπεραριθμήσιμο γιατί

οι ακολουθίες από L, R είναι υπεραριθμήσιμο

(διαγώνιο επιχείρημα του Cantor)

$$C = \{ x \in [0,1] : \text{το } x \text{ έχει τριαδικό ανάπτυγμα χωρίς } 1 \}$$

C κλειστό



C δεν έχει μεμονωμένα σημεία.

$x \in A \subseteq X$ (μετρ. χώρος) είναι μεμονωμένο στοιχείο του A αν

$\exists\, \varepsilon > 0$ / τ.ώ. $0 < d(x,y) < \varepsilon \implies y \notin A$.

$A = \{0\} \cup [1,2) \subseteq \mathbb{R} \implies 0$ μεμονωμένο του A

Χρησιμοποιώντας 3-αδικό ανάπτυγμα

$x \in C$ $\quad x = (.\underbrace{x_1 x_2 x_3}_{k} \cdots)_3$ $\quad x_j \in \{0, 2\}$

$\bar{x} = 2 - x$

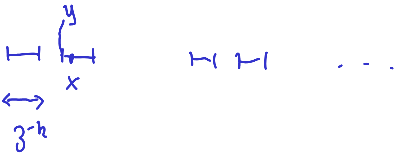
$\epsilon > 0$ $\quad \epsilon > \frac{1}{3^k}$

$C \ni y = .x_1 x_2 \cdots x_k \overline{x_{k+1}} x_{k+2} x_{k+3} \cdots$

$|x - y| \leq 3^{-k} < \epsilon$ ✓

$$x \in C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

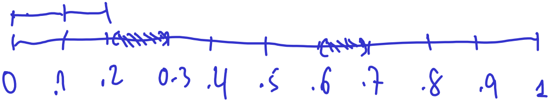
Θέλω $y \in C$, $|x-y| \leq 3^{-k}$ //

$x \in C_k =$ 

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \qquad C_n \longrightarrow C_{n+1}$$

"Χωρίζουμε κάθε διάστημα του C_n σε 10 ίσα διαστήματα, πετάμε το 3^o και το 7^o ανοιχτό διάστημα".

C_n :



$= [0, .2] \cup [0.3, .6] \cup [0.7, 1]$

$$C_n \longrightarrow C_{n+1}$$

$$m(C_{n+1}) = \frac{8}{10} m(C_n) \quad \text{άρα} \quad m(C_n) = \left(\frac{8}{10}\right)^n \to 0$$

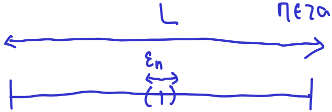
$$\Rightarrow m(C) = 0.$$

Σύνολο τύπου Cantor με θετικό μέτρο.

$C_0 = [0, 1]$ $\qquad\qquad$ $\varepsilon_n > 0$

$C_n \to C_{n+1}$: σε κάθε διάστημα του C_n

πετάω το μεσαίο ε_n κομμάτι του



ένα διάστημα του C_n

$$\boxed{\varepsilon_n = \frac{1}{10^n}}$$

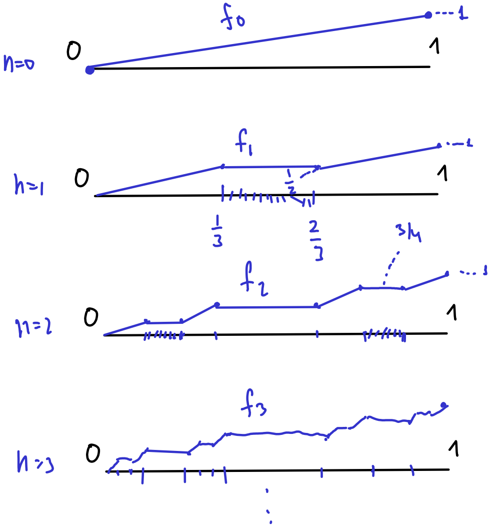
$$m(C) = \frac{7}{8}$$

$$\Uparrow$$

$$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 + 8\varepsilon_4 + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\varepsilon_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{10^n} = \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{10}\right)^n = \frac{1}{10}\,\frac{1}{1-2/10} = \frac{1}{10}\,\frac{5}{4} = \frac{1}{8}$$

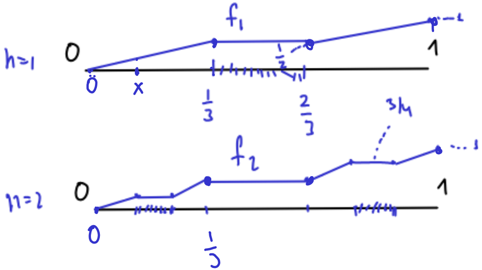
Συνάρτηση Cantor (Devil's staircase)



f_n αύξουσες $\quad f_n(0)=0$, $f_n(1)=1$

$$f_n \longrightarrow f \ ??$$

$$\|f_{n+1}-f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_{n+1}(x)-f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$$



$$f_1(x)-f_2(x)$$

$$\underbrace{f_2(x)-f_1(x)} \leq f_2(\text{δεξί άκρο}) - f_1(\text{αριστ. άκρο})$$

$$= f_1(\text{δεξ}) - f_1(\text{αρ.})$$

$$= \frac{1}{2^n}$$

$$\underbrace{\|f_{n+1} - f_n\|_\infty}_{\Delta_n} \le \frac{1}{2^n}$$

$\Longrightarrow$ Η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια f, δηλ.

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_x |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n} 0$$

$$f_n = \underbrace{f_n - f_{n-1}}_{\Delta_{n-1}} + \underbrace{f_{n-1} - f_{n-2}}_{\Delta_{n-2}} + \dots + \underbrace{f_2 - f_1}_{\Delta_1} + f_1$$

$$= f_1 + \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_{n-1}$$

Είναι Cauchy στην $\|\cdot\|_\infty$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 : \quad m > n > n_0 \Longrightarrow \| f_m - f_n \|_\infty < \epsilon$$

<u>ιδιότητα Cauchy</u> -

Θ Ο χώρος $C([0,1])$ με τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ είναι πλήρης, δηλ.

κάθε ακολουθία $x_n \in C([0,1])$ που είναι Cauchy συγκλίνει σε κάποια $x \in C([0,1])$.

$$\left.\begin{aligned} f_m &= f_1 + \Delta_1 + \dots + \Delta_{n-1} + \dots + \Delta_{m-1} \\ f_n &= f_1 + \Delta_1 + \dots + \Delta_{n-1} \end{aligned}\right\} \ \|f_m - f_n\|_\infty = \|\Delta_n + \dots + \Delta_{m-1}\|_\infty$$

$$\leq \|\Delta_n\|_\infty + \|\Delta_{n+1}\|_\infty + \dots + \|\Delta_{m-1}\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} + \dots = \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^{n_0}}$$

f (συν. Cantor)

αύξουσα

σταθερή σε κάθε διάστημα του C^c

συνεχής

$f(0) = 0 \qquad f(1) = 1$

επί του $[0,1]$

παραγωγίσιμη σχεδόν παντού με παράγωγο 0.

$$\underline{\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0: \ m>n>n_0} \Longrightarrow \|f_m - f_n\|_\infty < \epsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x \in [0,1] \ \ \forall \epsilon>0 \ \exists n_0 : \ m>n>n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

$\hookrightarrow$ $\forall x$ η ακολουθία $f_n(x)$ είναι Cauchy

πληρότητα του $\mathbb{R}$ $\Big\} \Rightarrow$ $f(x) = \lim_n f_n(x)$