1. Έστω Σ εκείνα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που είναι αριθμήσιμα ή τα συμπληρώματα τους είναι αριθμήσιμα. Δείξτε ότι το Σ είναι μια σ-άλγεβρα πάνω στο $\mathbb{R}$.

Θα χρειαστείτε ότι αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων είναι αριθμήσιμο σύνολο. ✓

1. $\emptyset, \mathbb{R} \in \Sigma$

2. $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$

3. $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

- Όλα τα A_n αριθμήσιμα: $\bigcup A_n$ είναι αριθμήσιμο ✓

- Το A_1^c είναι αριθμήσιμο: $\underbrace{\left(\bigcup A_n\right)}^c = \bigcap A_n^c \subseteq A_1^c$ αριθ.

2. Αν Σ είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και $\underbrace{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση, δείξτε ότι το σύνολο $\{f^{-1}(A) : A \in \Sigma\}$ είναι σ-άλγεβρα.

Απλά εφαρμόζετε τον ορισμό. Εδώ $f^{-1}(A)$ είναι εκείνα τα x για τα οποία $f(x) \in A$.

$$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in A\}$$

$$\Sigma' = \{ f^{-1}(A) : A \in \Sigma \}$$

1. $\emptyset \in \Sigma' \quad (\emptyset = f^{-1}(\emptyset)), \quad \mathbb{R} \in \Sigma' \quad (\mathbb{R} = f^{-1}(\mathbb{R}))$

2. $\underbrace{A \in \Sigma'} \Rightarrow \underbrace{A^c \in \Sigma'}$

$\exists B_1 \in \Sigma$ τ.ω. $A = f^{-1}(B_1)$

$\underbrace{A = \{x : f(x) \in B_1\}}$

$A^c = f^{-1}(B), \quad B \in \Sigma$

$\quad\; = \{x : f(x) \in B\}$

$B = B_1^c \in \Sigma \qquad A^c = \{x : f(x) \in B_1^c\} = \underbrace{\{x : f(x) \notin B_1\}}$

3. $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma' \implies \bigcup A_n \in \Sigma'$

$A_1 = f^{-1}(B_1)\ , \quad B_1 \in \Sigma$

$A_2 = f^{-1}(B_2)\ , \quad B_2 \in \Sigma$

$\vdots$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \overset{\dots}{=} f^{-1}\Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n}_{\in \Sigma}\Big)$$

$$x \in \bigcup f^{-1}(B_n) \iff x \in f^{-1}\left(\bigcup B_n\right)$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\exists n: \ x \in f^{-1}(B_n) \qquad f(x) \in \bigcup B_n$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists n: f(x) \in B_n \iff f(x) \in \bigcup B_n$$

3. Αν $K \subseteq \mathbb{R}$ είναι συμπαγές και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής για κάθε $\underline{x \in K}$ δείξτε ότι υπάρχει $k \in K$ τ.ώ.

$$f(k) = \sup \underbrace{\{f(x) : x \in K\}}. = M$$

$A \subseteq \mathbb{R}$

$M = \sup A \iff \exists\, a_n \in A : \quad a_n \to M$

$\forall a \in A : \ M \geq a$ (M είναι άνω φράγμα του A)

$\exists\, k_n \in K$ τ.ώ. $\quad f(k_n) \to M$

Υπάρχει υπακολουθία της k_n, έστω k_{n_i} $\quad i = 1, 2, \ldots,$ τ.ώ.

$\lim\limits_{i \to \infty} k_{n_i} = k \in K.$ $\quad f$ συνεχής στο k άρα

$M = \lim\limits_{n \to \infty} f(k_n) = \lim\limits_{i \to \infty} f(k_{n_i}) = f(k)$

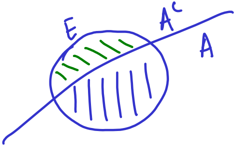
6. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει $m^*(A) = 0$ δείξτε ότι για κάθε $B \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει $m^*(A \cup B) \overset{\geq}{=} m^*(B)$.

Η μια κατεύθυνση έπεται από τη μονοτονία του m^*. Για την άλλη πάρτε μαζί μια κάλυψη του A και μια του B.

Θέλω $\quad m^*(A \cup B) \leq m^*(B) + m^*(A) = m^*(B)$

7. Δείξτε ότι κάθε σύνολο με εξωτερικό μέτρο μηδέν είναι μετρήσιμο.

Το μόνο που χρειάζεστε είναι η μονοτονία του m^*.



$$m^*(A) = 0$$

υποπροσθετικότητα

$$\forall E \subseteq \mathbb{R}: \quad m^*(E) \overset{\leq}{=} m^*(A \cap E) + m^*(A^c \cap E)$$

$$\geq: \quad m^*(E) \geq m^*(A^c \cap E)$$

$$m^*(A \cap E) \leq m^*(A) = 0$$

8. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\epsilon > 0$ δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subseteq E$ και $m(E) = m^*(A)$.

Έχουμε ήδη δείξει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ανοιχτό $G \supseteq A$ με $m(G) \leq m^*(A) + \epsilon$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μια ακολουθία από τέτοια ανοιχτά σύνολα.

$\forall \varepsilon \; \exists I_n$

$A \subseteq \bigcup I_n = G$

ανοιχτά

$m(G) \leq \sum |I_n| \leq m^*(A) + \varepsilon$

$\rightarrow \; \forall \varepsilon \; \exists G : \; A \subseteq G, \; m(G) \leq m^*(A) + \varepsilon$

$\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \dots$

$\rightarrow \varepsilon = 1/n \quad \exists G_n$ ανοιχτό $A \subseteq G_n, \; m(G_n) \leq m^*(A) + \frac{1}{n}$

$\forall n$

$A \subseteq E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \underset{\forall n}{\subseteq} G_n \Rightarrow m(E) \leq m(G_n) \leq m^*(A) + \frac{1}{n}$

G_δ

$\geq m^*(A)$

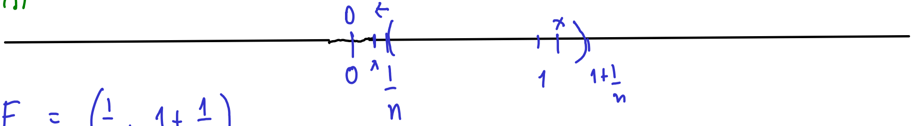
$m(E) = m^*(A)$

9. Ας είναι $E_1, E_2, \ldots$ μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και ορίζουμε το σύνολο $\liminf E_n$ να είναι εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ που ανήκουν τελικά σε όλα τα E_j (από κάποιο δείκτη j και πέρα δηλαδή) και το σύνολο $\limsup E_n$ να είναι εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ που ανήκουν σε άπειρα από τα E_j. Δείξτε ότι αυτά τα δύο σύνολα είναι μετρήσιμα.

Δείξτε πρώτα ότι

$$\liminf E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k, \quad \limsup E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k.$$

$\liminf E_n = \{x \in \mathbb{R} : \exists n_0 : x \in E_{n_0}, E_{n_0+1}, \ldots\}$



$E_n = \left(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$

$\liminf E_n = (0, 1]$ $\quad x \in (0,1]$ $\quad x > \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{x}$

$n_0 = \lceil \frac{1}{x} \rceil + 1$

$\limsup E_n = \{x \in \mathbb{R} :$ x ανήκει σε άπειρα από τα $E_n\}$

$$E_n = \begin{cases} (0,1) & n \text{ άρτιο} \\ (2,3) & n \text{ περιττό} \end{cases}$$

$$\liminf E_n = \emptyset$$

$$\limsup E_n = (0,1) \cup (2,3)$$

$$E_n = \begin{cases} (0,1] & n \text{ άρτιο} \\ [1,2) & n \text{ περιττά} \end{cases}$$

$$\liminf E_n = \{1\}$$

$$\limsup E_n = (0,2)$$

$$\liminf E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k\right]}_{=}, \quad \limsup E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k}_{B_n}.$$

$$A_n = \{x : x \in E_n, E_{n+1}, E_{n+2}, \dots\}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x : \underbrace{x \in A_1}_{E_1, E_2, \dots} \text{ ή } \underbrace{x \in A_2}_{E_2, E_3, \dots} \text{ ή } \underbrace{x \in A_3}_{E_3, E_4, \dots} \text{ ή } \dots\}$$

$$B_n = \{x : \text{το } x \in E_n \text{ ή } x \in E_{n+1} \text{ ή } x \in E_{n+2} \text{ ή } \dots\}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{x : \underbrace{x \in B_1}_{\text{μπορώ να βρώ το } x \text{ μετά το } E_1}, \underbrace{x \in B_2}_{\text{το βρίσκω από 2 και μετά}}, \dots\} = \{x : \forall n_0 \ \exists n \geq n_0 : x \in E_n\}$$

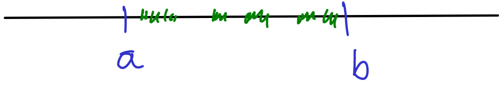
10. Αν το μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει $m(E) > 0$ δείξτε ότι υπάρχει διάστημα I τ.ώ.

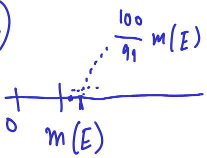
$$m(E \cap I) \geq \frac{9}{10}|I|.$$

$I = (a, b)$

$(1-\varepsilon)$

Έστω όχι. Τότε σε κάθε διάστημα έχουμε $m(E \cap I) < \frac{9}{10}|I|$. Εφαρμόστε το αυτό σε μια κάλυψη του E με ανοιχτά διαστήματα και συνολικού μήκους πολύ κοντά στο $m(E)$ και καταλήξτε σε άτοπο.





$E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ τ.ώ. $m(E) \geq \frac{91}{100} \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$

Έστω όχι. $\forall n$ $m(E \cap I_n) < \frac{9}{10}|I_n|$

Προσθέτω για $n = 1, 2, \dots$

$m(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E \cap I_n) \leq \frac{9}{10} \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \frac{90}{100} \frac{100}{91} m(E) < m(E)$ άτοπο

G_δ = αριθμήσιμες τομές ανοιχτών

F_σ = αριθμήσιμες ενώσεις κλειστών

$A \in G_\delta \Leftrightarrow A^c \in F_\sigma$

$\Downarrow \qquad\qquad \Uparrow$

$A = \bigcap_1^\infty G_n \Rightarrow A^c = \bigcup_1^\infty G_n^c$

<u>Θ</u> G ανοιχτό $\Rightarrow$ G είναι F_σ. Αν F κλειστό $\Rightarrow$ F είναι G_δ

F κλειστό $F \subseteq G_n$ ανοιχτά. Ορίζω $G_n = \{x : dist(x, F) < \frac{1}{n}\}$

$G_n = \{x : \exists\, y \in F : |y - x| < \frac{1}{n}\}$. $G_n \supseteq G_{n+1}$, $F \subseteq G_n$.

$F \overset{\subseteq}{=} \bigcap_{n=1}^\infty G_n$ έστω $x \in \bigcap_{n=1}^\infty G_n$. $\forall n$ $x \in G_n$. $\forall n$ $\exists\, y_n \in F$: $|y_n - x| < \frac{1}{n}$.

$y_1, y_2, \dots \in F$ $\quad \underset{\in F}{y_n} \to \underset{\in F}{x}$ ✓

$$f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$$

$$\{f > \alpha\} = \{x : f(x) > \alpha\}$$

<u>Μετρήσιμη συνάρτηση</u> : Τα σύνολα $\{f > \alpha\}$ είναι μετρήσιμα $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\{f > \alpha\} = f^{-1}\big((\alpha, +\infty]\big)$$

Θ Τα παρακάτω ισοδύναμα

1) f μετρήσιμη

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\{f \geq \alpha\}$ μετρήσιμο

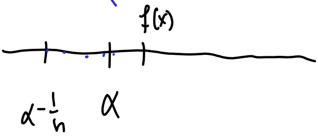
3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\{f < \alpha\}$ —||—

4) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\{f \leq \alpha\}$ —||—

1) $\Rightarrow$ 2) $\qquad \{f > \beta\} \in \mathcal{M}$

$$\{f \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{f > \alpha - \frac{1}{n}\right\}$$

$$f(x) \geq \alpha \overset{\Rightarrow}{\underset{\Leftarrow}{\Leftrightarrow}} \forall n : f(x) > \alpha - \frac{1}{n}$$



2) $\Rightarrow$ 3) $\qquad \{f < \alpha\} = \{f \geq \alpha\}^c$

3) $\Rightarrow$ 4) $\qquad \{f \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{f < \alpha + \frac{1}{n}\right\}$

4) $\Rightarrow$ 1) $\qquad \{f > \alpha\} = \{f \leq \alpha\}^c$

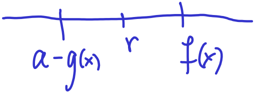
$$\{\alpha < f < \beta\} = \{f > \alpha\} \cap \{f < \beta\}$$

$$\{\alpha < f < +\infty\} = \{f > \alpha\} \cap \underbrace{\{f < +\infty\}}_{\substack{\shortparallel \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f < n\}}}$$

Θ f,g μετρ. $c \in \mathbb{R}$ τότε $f+c$, $c\cdot f$, $f+g$, $f\cdot g$

Απ

$$\{f+c > \alpha\} = \{f > \alpha - c\}$$



$$c=0: \quad \{cf > \alpha\} = \{x : 0 > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \alpha \geq 0 \\ \mathbb{R} & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$c>0: \quad \{cf > \alpha\} = \left\{f > \frac{\alpha}{c}\right\}$$

$$c<0: \quad \{cf > \alpha\} = \left\{f < \frac{\alpha}{c}\right\}$$

$$\{f+g > \alpha\} = \{x : \underbrace{f(x)} > \underbrace{\alpha - g(x)}\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x : f(x) > r > \alpha - g(x)\}$$

αριθμήσιμη ένωση

$r=1$: $f > 1 > \alpha - g$

$r=2$: $f > 2 > \alpha - g$

$$\{f > r > \alpha - g\} = \{f > r\} \cap \{r > \alpha - g\} = \{\underline{f > r}\} \cap \{\underline{g > \alpha - r}\}$$

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2 \right)$$ αρκεί να δείξω

φ μετρ. $\Rightarrow$ φ^2 μετρ.

$$\{\varphi^2 > \alpha\} = \begin{cases} \{\varphi > \sqrt{\alpha}\} \cup \{\varphi < -\sqrt{\alpha}\}, & \alpha \geq 0 \\ \mathbb{R} & \alpha < 0 \end{cases}$$