Κανονικότητα (regularity) του μέτρου Lebesgue

$\underline{\Theta}$ $E \subseteq \mathbb{R}$ τα παρακάτω ισοδύναμα

(a) E μετρήσιμο

$\Downarrow$

(b) $\forall \epsilon > 0$ $\exists$ ανοιχτό $G \supseteq E$ τ.ώ. $m^*(G \setminus E) < \epsilon$

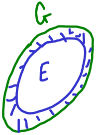
(c) $\exists$ σύνολο G_δ, $A \supseteq E$ με $m^*(A \setminus E) = 0$

G_δ είναι ένα σύνολο που γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοιχτών.

F_σ . – – – – – – – – ένωση κλειστών

(a) $\Rightarrow$ (b) Έστω E μετρήσιμο

$\forall E \subseteq \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ ανοιχτό G τ.ώ. $G \supseteq E$ και $m^*(G) \leq m^*(E) + \varepsilon$



Σκοπός: $m^*(G \setminus E) < \varepsilon$

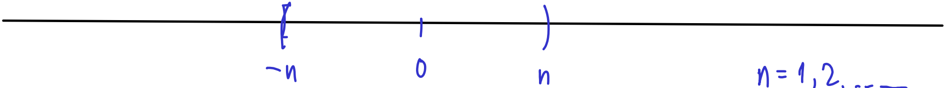
$$m^*(G) \leq m^*(E) + m^*(G \setminus E) \leq m^*(E) + \varepsilon$$

Προσθετικότητα: $m(G) = m(E) + m(G \setminus E)$

$$\Rightarrow \quad m(G \setminus E) = m(G) - m(E) \leq m(E) + \varepsilon - m(E) = \varepsilon$$

Προσοχή γιατί $m(E) = +\infty$.

$m(E)=+\infty$



$n=1,2,\dots$

$E_n = E\cap(-n,n) \Rightarrow m(E_n)\le 2n<\infty$ άρα υπάρχει ανοιχτό $G_n\supseteq E_n$ τ.ώ. $m(G_n\setminus E_n)\le \frac{\varepsilon}{2^n}$. (από την προηγούμενη σελίδα)

Παίρνω $G=\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ ανοιχτό, $G\supseteq G_n\supseteq E_n$

άρα $G\supseteq E$ αφού $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

$$m(G\setminus E)=m\left(\bigcup G_n\setminus\bigcup E_n\right)$$

$$\bigcup G_n\setminus\bigcup E_n\subseteq\bigcup(G_n\setminus E_n)$$

$x\in\bigcup G_n\setminus\bigcup E_n \Rightarrow x\in G_{n_1}$

$x\in\bigcap E_n^c \Rightarrow x\notin E_{n_1}$

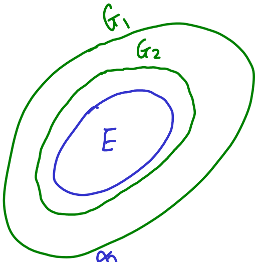
$x\in G_{n_1}\setminus E_{n_1}$

$$m(G \setminus E) = m\left(\bigcup G_n \setminus \bigcup E_n\right) \leqslant m\left(\bigcup G_n \setminus E_n\right) \overset{\text{unorφ.}}{\leqslant} \sum_{n=1}^{\infty} m(G_n \setminus E_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon .$$

(b) $\forall \epsilon > 0 \ \exists$ ανοικτό $G \supseteq E$ τ.ώ. $m^*(G \setminus E) < \epsilon$

(c) $\exists$ σύνολο G_δ, $A \supseteq E$ με $m^*(A \setminus E) = 0$

(b) $\Rightarrow$ (c)



Παίρνω (από το (a)) ανοικτό $G_n \supseteq E$ με

$$m^*(G_n \setminus E) \leq \frac{1}{n}$$

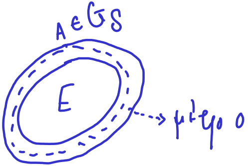
Ορίζω το G_δ $\quad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \supseteq E$

$$0 \leq m^*(A \setminus E) \underset{\forall n}{\leq} m^*(G_n \setminus E) \leq \frac{1}{n} \Rightarrow m^*(A \setminus E) = 0$$

(c) $\exists$ σύνολο G_δ, $A \supseteq E$ με $m^*(A \setminus E) = 0$

$\Downarrow$

(a) E μετρήσιμο



Ξέρουμε ότι κάθε σύνολο μέτρου 0 είναι μετρήσιμο:

Αν T με $m^*(T) = 0$:

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \qquad m^*(A) = \underbrace{m^*(\overbrace{A \cap T}^{\subseteq T})}_{=0} + m^*(A \setminus T)$$

$$m^*(A) \underset{\text{ισχύει}}{\leq} m^*(A \setminus T) \leq m^*(A)$$

$$E = A \cap (A \setminus E)^c$$

άρα

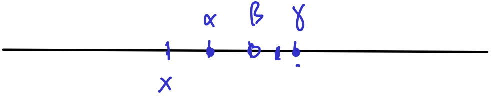
E μετρήσιμο

Θ Αν $G \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό τότε υπάρχουν ανοιχτά διαστήματα I_n, $n=1,2,\dots$, ξένα ανά δύο, τ.ώ. $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

Δεν ισχύει στο $\mathbb{R}^2$.

Ορίζουμε για $x \in G$: $I_x = \bigcup_{x \in I \subseteq G} I$ (ένωση όλων των ανοιχτών διαστημάτων που περιέχουν το x και περιέχονται στο G)

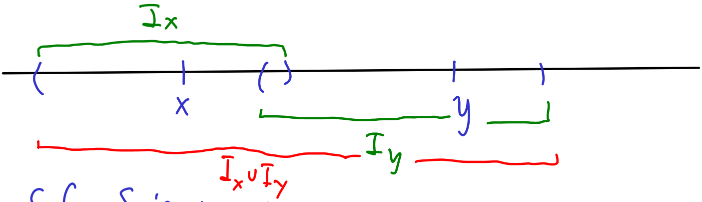
$I_x \neq \emptyset$ $\quad x \in I_x \quad$ "I_x είναι διάστημα"



Αν I_x δεν είναι διάστημα μπορώ να βρω $\alpha < \beta < \gamma$ τ.ώ. $\alpha, \gamma \in I_x$, $\beta \notin I_x$

$\gamma \in I_x \Rightarrow \exists$ διάστημα $I \ni x, \gamma$, $I \subseteq G$ άρα $\beta \in I \subseteq I_x$ (άτοπο)

Αν $x, y \in G$, $x \neq y$, τότε $I_x \cap I_y = \emptyset$ ή $I_x = I_y$



$$\left.\begin{array}{l} I_x \subseteq G \text{ διάστημα} \\ I_y \subseteq G \text{ διάστημα} \end{array}\right\} \quad I_x \cup I_y \subseteq G \text{ διάστημα}$$

$$\ni$$

$$x, y$$

$$I_x \cup I_y \subseteq I_x \qquad\qquad \left.I_x \cup I_y \subseteq I_y\right\} \Longrightarrow I_x = I_y$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$I_y \subseteq I_x \qquad\qquad\qquad I_x \subseteq I_y$$

$$G = \bigcup_{x \in G} I_x$$

κρατάμε μόνο ένα αντίγραφο του κάθε I_x

Τότε θα έχω ένωση ξένων διαστημάτων.

<u>Λήμμα</u> Αν I_j, $j \in J$, είναι μια οικογένεια ξένων ανά δύο ανοιχτών διαστημάτων στο $\mathbb{R}^d$ τότε J είναι αριθμήσιμο.

<u>Απ</u> $f : J \to \mathbb{Q}$ 1-1.

$f(j)$ = ένας οποιοσδήποτε ρητός από το I_j

$f(j_1) = f(j_2) = q \in \mathbb{Q}$ δε γίνεται γιατί $I_{j_1} \cap I_{j_2} = \emptyset$.

Θ $E \in \mathcal{M}$, $m(E) < \infty$, $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχουν ξένα ανά δύο ανοιχτά διαστήματα $I_1, \dots, I_n$ τ.ώ.

$$m\left(E \,\triangle\, \bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) \leq \varepsilon.$$

$$A \triangle B = A \setminus B \cup B \setminus A$$

Βρίσκουμε $G \supseteq E$ τ.ώ. $m(G \setminus E) \leq \frac{\varepsilon}{10}$.

$G = \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} I_n$, I_n ανοιχτά διαστήματα $\Rightarrow m(G) = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$

$m(G) = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$ συγκλίνουσα σειρά θετικών όρων

$m(E) < \infty$

$m(G) = m(E) + m(G \setminus E) \leq m(E) + \varepsilon$

Παίρνω N τ.ώ.

$\sum_{n=N+1}^{\infty} |I_n| \leq \frac{\epsilon}{10}$

$G \supseteq E$ $\quad m\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) \leq m\left(\dot{\bigcup_{N+1}^{\infty}} I_n\right) = \sum_{N+1}^{\infty} |I_n| \leq \frac{\epsilon}{10}$

$\bigcup_{n=1}^{N} I_n$ $\quad m\left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n \setminus E\right) \leq m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \setminus E\right) = m(G \setminus E) \leq \frac{\epsilon}{10}$

άρα $m\left(E \triangle \bigcup_{1}^{N} I_n\right) \leq \frac{\epsilon}{10} + \frac{\epsilon}{10} = \epsilon/5 \leq \epsilon$.

4. Αν K_1, K_2 είναι συμπαγή σύνολα στο $\mathbb{R}$ και $d = \inf\{|k_1 - k_2| : \ k_1 \in K_1, k_2 \in K_2\}$ τότε υπάρχουν $x_1 \in K_1, x_2 \in K_2$ τ.ώ.

$$|x_1 - x_2| = d.$$

Χρησιμοποιήστε την ακολουθιακή συμπάγεια. Ξεκινήστε από μια ακολουθία $(k_n^1, k_n^2) \in K_1 \times K_2$ τέτοια ώστε

$$|k_n^1 - k_n^2| \to d.$$

Πάρτε μια υπακολουθία έτσι ώστε να συγκλίνουν τα k_n^1 και αυτής πάρτε μια υπακολουθία ώστε να συκλίνουν τα k_n^2.

5. Αν K_1, K_2 είναι δύο ξένα μεταξύ τους συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ δείξτε ότι

$$m^*(K_1 \cup K_2) = m^*(K_1) + m^*(K_2).$$

Δε μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ότι τα συμπαγή είναι Borel (ως κλειστά) και άρα μετρήσιμα.

Σύμφωνα με την Άσκηση 4 τα K_1, K_2 έχουν μεταξύ τους θετική απόσταση d. Ξεκινήστε από μια κάλυψη του $K_1 \cup K_2$ με ανοιχτά διαστήματα I_n και παρατηρήστε ότι μπορείτε να υποθέσετε ότι όλα τα I_n έχουν μήκος $< d$ (αν κάποιο διάστημα δεν έχει μπορείτε να το αντικαταστήσετε στην κάλυψη με ανοιχτά διαστήματα μήκους $< d$ και έτσι ώστε το συνολικό επιπλέον μήκος που προσθέτετε στην κάλυψή σας έτσι να είναι όσο μικρό θέλετε). Διαμερίστε έπειτα τα διαστήματα της κάλυψης του $K_1 \cup K_2$ σε δύο κατηγορίες: αυτά που τέμνουν το K_1 και αυτά που τέμνουν το K_2 (μπορείτε επίσης να υποθέσετε ότι κάθε διάστημα της κάλυψης τέμνει το K_1 ή το K_2, αφού αλλιώς είναι άχρηστο για την κάλυψη).

$$\operatorname{dist}\Big(\underbrace{(0,1)}_{x}\ ,\ \underbrace{(-1,0)}_{y}\Big) = 0$$

$|x-y|$ οσοδήποτε μικρό

αν K_1, K_2 συμπαγή $\Rightarrow \exists\, x_1 \in K_1,\ x_2 \in K_2 : |x_1 - x_2| = \overbrace{\inf\{|k_1-k_2|,\ k_i \in K_i\}}^{d}$

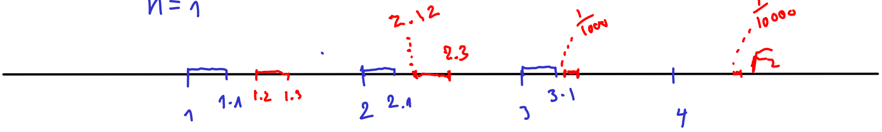
Υπάρχει ακολουθία $k_n^1 \in K_1$, $k_n^2 \in K_2$ τ.ώ.

$$\Big|\overset{\in K_1}{k_n^1} - k_n^2\Big| \to d = \Big|\lim_n k_n^1 - \lim_n k_n^2\Big| = |x_1 - x_2|$$

Υπάρχει υπακολουθία της k_n^1 που συγκλίνει σε κάποιο $x_1 \in K_1$. Πετώ τα υπόλοιπα n. Παίρνω κι άλλη υπακολουθία ώστε $k_n^2 \to x_2 \in K_2$.

$F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}$ κλειστά, ξένα, $\operatorname{dist}(F_1, F_2) = 0$

$$F_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[n, n+\frac{1}{10}\right] \qquad \left(\overset{\mathbb{R}}{x} \leftarrow x_n \in F_1\right) \Rightarrow x \in F_1$$



$$I = \left[\lfloor x \rfloor - 2, \lfloor x \rfloor + 2\right]$$

Τελικά $|x_n - x| \leq 0.1$

$|x - \lfloor x \rfloor| \leq 1$

$|x_n - \lfloor x \rfloor| \leq 1.1$

$\Rightarrow x_n \in I.$

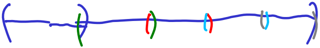
K_1, K_2 ξένα συμπαγή : $m^*(K_1 \cup K_2) \overset{\leq}{=} m^*(K_1) + m^*(K_2)$

$$m^*(K_1 \cup K_2) \geq m^*(K_1) + m^*(K_2)$$

$$K_1 \cup K_2 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \qquad \underbrace{\sum |I_n|}_{\sum |I_n'| + \sum |I_n''| - \varepsilon} \leq m^*(K_1 \cup K_2) + \varepsilon/10$$

$3d \leq |I_n| < 4d$

$d = \mathrm{dist}(K_1, K_2) > 0$

I_n: 

$I_n \longrightarrow I_n^1, I_n^2, \dots, I_n^k \qquad |I_n^j| < d$

$$K_1 \cup K_2 \subseteq \bigcup I_n$$

$$K_1 \subseteq \bigcup I_n'$$

$$K_2 \subseteq \bigcup I_n''$$

$$\begin{array}{ccc} m^*(K_1) & + & m^*(K_2) \\ \wedge\!| & & \wedge\!| \\ \sum |I_n'| & + & \sum |I_n''| \end{array} \leq \sum |I_n| + \frac{\varepsilon}{10}$$

$$\leq m^*(K_1 \cup K_2) + \frac{\varepsilon}{10} + \frac{\varepsilon}{10}$$

$$m^*(K_1) + m^*(K_2) \leq m^*(K_1 \cup K_2) \cancel{+ \frac{\varepsilon}{5}}, \quad \forall \varepsilon$$