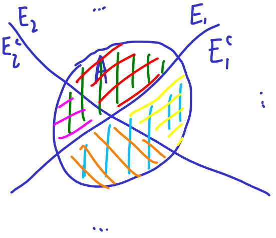
$E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο αν $\underline{\underline{\forall A \subseteq \mathbb{R}}}$

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

E μετρ. $\Updownarrow$ E^c μετρ.

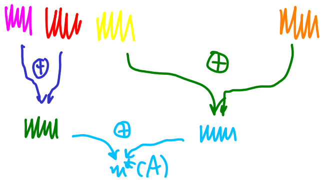
Πάντα ισχύει $\leqslant$ (υποπροσθετικότητα)

$A \cap E_1 \cap E_2^c$



E_1, E_2 μετρήσιμα $\Rightarrow$ $E_1 \cup E_2$ μετρ.

$$m^*(A) = m^*(\underbrace{A \cap (E_1 \cup E_2)}) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c)$$



$\underline{\Theta}$ Τα μετρήσιμα σύνολα είναι μια σ-άλγεβρα (συμβολίζουμε με $\mathcal{M}$)

- $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$
- $\emptyset \in \mathcal{M}$, $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$ τετριμμένο
- $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$ (μπορώ να υποθέσω E_n ξένα)

για 2 σύνολα το κάναμε

$\Rightarrow$ $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcap_{1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$

$E_1, E_2, \dots$

$D_2^c = E_2^c \cup E_1$ $\quad$ $D_3^c = E_3^c \cup (E_1 \cup E_2)$

$\vdots$

$D_1 \quad D_2 = E_2 \setminus E_1 = E_2 \cap E_1^c \quad , \quad D_3 = E_3 \setminus \underbrace{(E_1 \cup E_2)}_{= D_1 \cup D_2} = E_3 \setminus (D_1 \cup D_2)$

$D_4 = E_4 \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3) = E_4 \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3) \quad \dots$

Επαγωγικά : $\quad \underline{D_i \cap D_j = \emptyset}$ αν $i \neq j$, μετρήσιμα

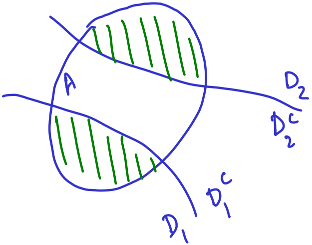
$$\forall k : \quad E_1 \cup \dots \cup E_k = D_1 \cup \dots \cup D_k$$

$$\Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

$$m^*\left(A\cap \bigcup_{n=1}^{N} D_n\right) \overset{\le}{=} m^*(A\cap D_1) + m^*(A\cap D_2) + \dots + m^*(A\cap D_N)$$

$$\to m^*\left(\underbrace{A\cap (D_1\cup D_2)}\right) = m^*(A\cap D_1) + m^*(A\cap D_2)$$

Εφαρμ. ορισμό της μετρησιμότητας στο $A' = A\cap(D_1\cup D_2)$



$$m^*\left(A\cap \bigcup_{n=1}^{N+1} D_n\right) = m^*\left(A\cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} D_n\right)\cup D_{N+1}\right) = m^*\left(A\cap \bigcup_{1}^{N} D_n\right) + m^*(A\cap D_{N+1})$$

$$m^*(A) = m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} D_n\right) + m^*\left(A \cap \bigcap_{n=1}^{N} D_n^c\right)$$

$$\geq \quad \text{——}\|\text{——} \quad + m^*\left(A \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n^c\right)$$

$$= \overbrace{m^*(A \cap D_1) + \dots + m^*(A \cap D_N)}^{\lim_{N \to \infty}} + m^*\left(A \cap \bigcap_1^{\infty} D_n^c\right)$$

...... για κάθε N

$$m^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A \cap D_n) + m^*\left(A \cap \bigcap_1^{\infty} D_n^c\right)$$

\\ υποπροσθ.

$$\geq m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_1^{\infty} D_n\right)^c\right)$$

$\leq$ υποπροσθ. άρα $m^*(A) = m^*\left(A \cap \bigcup_1^{\infty} D_n\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_1^{\infty} D_n\right)^c\right)$

Θ $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}$ = Borel σ-άλγεβρα = η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα ανοιχτά σύνολα

Τα διαστήματα (a, b) παράγουν την $\mathcal{B}$.

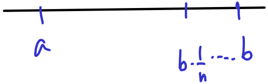
Τα διαστήματα $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ παράγουν την $\mathcal{B}$

(a,b)

$a<b$

$$(a, +\infty) \cap (b, +\infty)^c = (a, b].$$

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{n}\right]$$



Για το $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}$ αρκεί να δείξω $\forall a \in \mathbb{R} : (a, +\infty) \in \mathcal{M}$.

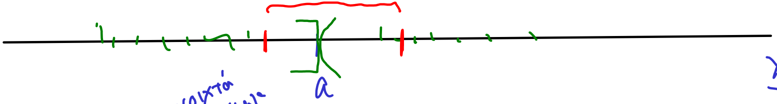
$(a, +\infty) \in \mathcal{M}$

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, δείχνω

$$m^*(A) = m^*(A \cap (a,+\infty)) + m^*(A \cap (-\infty, a]) \leq \sum |I_n|$$

....

✓ $\geq$ σημαντικό I_n



Υπόθεση $a \notin A$

$A \subseteq \bigcup_{1}^{\infty} I_n$ .... ανοιχτά διαστήματα

$$m^*(A) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$$

ανοιχτά διαστήματα

$$A \cap (a,+\infty) \subseteq \bigcup \left(I_n \cap (a,+\infty)\right)$$

I_n

$I_n \cap (-\infty, a)$ $\quad$ $I_n \cap (a, +\infty)$

$$m^*(A \cap (a,+\infty)) \leq \sum_n |I_n \cap (a,+\infty)| \quad (1)$$

$$m^*(A \cap (-\infty, a]) \leq \sum_n |I_n \cap (-\infty, a)| \quad (2)$$

$$(1) + (2) = \sum_{1}^{\infty} |I_n|$$

Έστω $a \in A$.

$\underline{\Theta}$ $a \in A \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow m^*(A \setminus \{a\}) \overset{\text{μονοτονία}}{\leqslant} = \overset{\geqslant ?}{} m^*(A)$

Έστω $\varepsilon > 0$.

$$A \setminus \{a\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \implies A \subseteq (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

μήκος της κάλυψης $= 2\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \geqslant m^*(A)$

$$\sum |I_n| \geqslant m^*(A) - 2\varepsilon$$

inf

$$m^*(A \setminus \{a\}) \geqslant m^*(A) - 2\varepsilon, \ \underline{\underline{\forall \varepsilon}} \implies m^*(A \setminus \{a\}) \geqslant m^*(A)$$

$m^*(\cdot)$ περιορισμένη στο $\mathcal{M}$ τη συμβολίζουμε με m

<u>Θ</u> (Προσθετικότητα του μέτρου)

Αν $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{M}$, $E_i \cap E_j = \emptyset \Rightarrow m\left(\bigcup_1^\infty E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$

$D_1, \ldots, D_N$ ανά δύο ξένα: $m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} D_n\right) = \sum_{n=1}^{N} m^*(A \cap D_n)$

$A = \mathbb{R}$

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) = \sum_{n=1}^{N} m(E_n)$$

$$\Rightarrow m\left(\bigcup_1^\infty E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

$$\leq \text{υποπροσθ.}$$

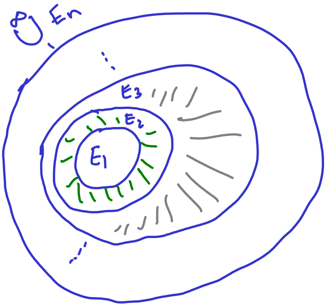
$$\text{\rotatebox{90}{$\leq$}}$$

$$m\left(\bigcup_1^\infty E_n\right)$$

Θ $\quad E_1, E_2, \dots \in \mathcal{M}$

(α) Αν $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \dots$ τότε $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$

(β) Αν $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \dots$ και $m(E_1) < \infty$: $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n} m(E_n)$



—/—

ξένα

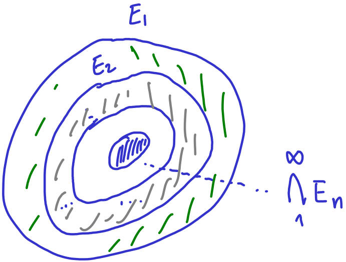
$$\bigcup_{1}^{\infty} E_n = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup (E_3 \setminus E_2) \cup \dots$$

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m(E_1) + m(E_2 \setminus E_1) + \dots + \dots$$

$$= \lim_{N\to\infty} m(E_1) + m(E_2 \setminus E_1) + \dots + m(E_N \setminus E_{N-1})$$

$$= \lim_{N} m(E_N)$$

(β) Αν $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \cdots$ και $\underline{m(E_1) < \infty}$: $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \underset{\geq ?}{\overset{\leq}{=}} \lim_n m(E_n)$



$$E_1 \setminus E_2 \;,\; E_2 \setminus E_3 ,\; \dots ,\; E_{N-1} \setminus E_N$$

$$m(E_1 \setminus E_2) + \dots + m(E_{N-1} \setminus E_N) = m(E_1 \setminus E_N)$$

$$\Big\downarrow \lim_N \quad \text{προσθ.}$$

$$m\left(E_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \qquad\qquad = m(E_1) - m(E_N)$$

$$= \cancel{m(E_1)} - m\left(\bigcap_1^{\infty} E_n\right) \qquad\qquad = \cancel{m(E_1)} - \lim_N m(E_N)$$

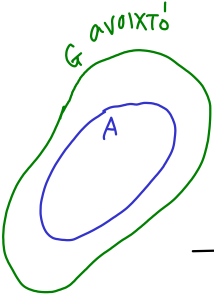
$m(E_1) < \infty$

(β) Δεν ισχύει χωρίς την υπόθεση $m(E_1) < \infty$.

$$E_n = (n, +\infty) \qquad m(E_n) = +\infty \longrightarrow +\infty$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset \qquad m\left(\bigcap_{1}^{\infty} E_n\right) = m(\emptyset) = 0$$

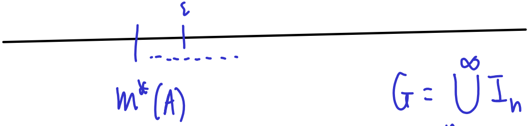
Άσκ. 2 (σελ. 3, Μήτσου) $A \subseteq \mathbb{R}$, $m^*(A) < \infty$, $\underline{\forall \varepsilon > 0}$ $\exists\, G \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό με $A \subseteq G$, $m^*(G) \leq m^*(A) + \varepsilon$.



Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists$ ανοιχτή κάλυψη $I_n \supseteq A$

τ.ώ. $m^*(A) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$

ανοιχτά



$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ ανοιχτό

$$m^*(G) \overset{\text{υποπρ.}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq m^*(A) + \varepsilon$$