$m^*(A)$ ορίζεται για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$

$m(A)$ ορίζεται για κάποια $A \subseteq \mathbb{R}$ (μετρήσιμα)

σ-άλγεβρα συνόλων $\mathcal{L}$ είναι μια οικογένεια από σύνολα: όλα υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

1) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{L}$

2) $A \in \mathcal{L} \Rightarrow A^c = \mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{L}$

3) $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{L} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$

- $\mathcal{L} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

- $\mathcal{L} = \{\emptyset, A, A^c, \mathbb{R}\}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}$

- $\mathcal{L} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ = δυναμοσύνολο του $\mathbb{R}$ = όλα τα υποσύνολα

$$
\begin{tikzcd}
A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{L} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] & \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L} \\
 & \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L} \\
A_1^c, A_2^c, \ldots \in \mathcal{L} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{L} \arrow[r, Rightarrow] & \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)\right]^c \in \mathcal{L} \arrow[uu, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

Τομή σ-αλγεβρών είναι σ-άλγεβρα

I σύνολο δεικτών

Θ. Αν $\mathcal{L}_i$, $i \in I$, είναι σ-άλγ. υποσυνόλων του $\mathbb{R}$

τότε και η $\mathcal{L} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{L}_i$ είναι σ-άλγεβρα.

1) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{L}$

2) $A \in \mathcal{L} \Rightarrow \forall i \in I:\ A \in \mathcal{L}_i \Rightarrow \forall i \in I:\ A^c \in \mathcal{L}_i \Rightarrow A^c \in \mathcal{L}$

3) $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{L} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$

Ας είναι $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, μια οικογένεια από υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

$\mathcal{L}_i$ να είναι όλες οι σ-άλγεβρες που $\supseteq \mathcal{K}$ (π.χ. $\mathcal{P}(\mathbb{R})$)

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = \bigcap_{\substack{\mathcal{K} \subset \mathcal{L} \\ \text{σ-άλγεβρα}}} \mathcal{L} \quad \text{είναι σ-άλγεβρα}$$

$\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ ονομάζεται σ-άλγεβρα που παράγεται από το $\mathcal{K}$.

$\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ είναι η πιο μικρή σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{K}$.

"Αν $\mathcal{L} \supseteq \mathcal{K}$ είναι σ-άλγεβρα $\Longrightarrow \mathcal{L} \supseteq \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$"

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = \bigcap_{\mathcal{L} \supseteq \mathcal{K}} \mathcal{L} \subseteq$$ σε κάθε $\mathcal{L}$ που συμμετέχει στην τομή δηλ. σε κάθε σ-άλγ. $\supseteq \mathcal{K}$.

Η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$

Είναι η σ-άλγεβρα που παράγουν τα ανοιχτά του $\mathbb{R}$.

$\mathcal{B}$ = Borel σ-άλγ.

$G \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό $\Longrightarrow$ $G \in \mathcal{B}$ ✓

$F \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό $\Longrightarrow$ $F \in \mathcal{B}$ ✓

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow$

F^c ανοιχτό $\Longrightarrow$ $F^c \in \mathcal{B}$

Υπάρχουν σύνολα Borel που δεν είναι ανοιχτά ούτε κλειστά

$$[0,1) \in \mathcal{B}$$

$$[0,1) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1\right)$$

Υπάρχουν σύνολα που δεν είναι Borel. $\left(\mathcal{B} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})\right)$

Αν $\mathcal{K}$ είναι τα ανοιχτά διαστήματα του $\mathbb{R}$ τότε $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = \mathcal{B}$.

$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} \subseteq \mathcal{B}$

$\mathcal{B}$ περιέχει τα ανοιχτά διαστήματα

άρα $\mathcal{B}$ περιέχει την ελάχιστη σ-άλγ. που περιέχει τα αν. διαστ., δηλ. τη $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$.

$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} \supseteq \mathcal{B}$ $\Leftarrow$ αρκεί να δείξουμε περιέχει κάθε ανοιχτό

Η $\mathcal{L}_K$ περιέχει κάθε ανοιχτό $G \subseteq \mathbb{R}$.

<u>Λήμμα</u> Κάθε ανοιχτό $G \subseteq \mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ανοιχτών διαστημάτων

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n).$$

(Ισχύει και με ξένα διαστήματα.)

$x \in G \Rightarrow \exists\, \varepsilon_x > 0 : \ (x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x) \subseteq G$ (ανοιχτό)

$G = \underset{\underline{\underline{x \in G}}}{\bigcup} (x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x)$ εύκολο αλλά υπεραριθμήσιμη ένωση

1) $\mathbb{Q}$ πυκνοί στο $\mathbb{R}$
2) $\mathbb{Q}$ αριθμήσιμο σύνολο

Όλα τα ανοιχτά διαστήματα με ρητά άκρα
Είναι αριθμήσιμα στο πλήθος. $\mathcal{I}$

$\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$

$\mathcal{I} = \{ (q_m, q_n) : \ q_n > q_m, \ m, n \in \mathbb{N} \}$ είναι αριθμήσιμο

$^{1}(q_1, q_1)$ $\quad$ $^{2}(q_1, q_2)$ $\quad$ $^{4}(q_1, q_3)$ $\quad$ $^{7}(q_1, q_4)$ - - - - -

$(q_2, q_1)^{3}$ $\quad$ $(q_2, q_2)^{5}$ $\quad$ $(q_2, q_3)^{8}$

$(q_3, q_1)^{6}$ $\quad$ $(q_3, q_2)^{9}$

$(q_4, q_1)^{10}$

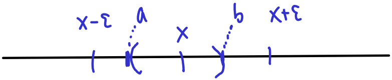
$\mathcal{I}$ αριθμήσιμο

✓

$$G = \bigcup I$$ ανοιχτό σύνολο $\subseteq G$

$I \in \mathcal{I}$, $I \subseteq G$

$x \in G$, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq G$



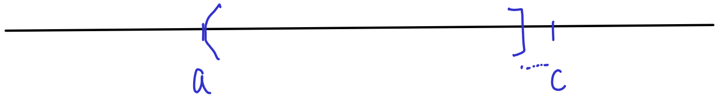
$a, b \in \mathbb{Q}$

$\mathcal{B}$ = η σ-άλγ. που παράγεται από τα $(a, +\infty)$ $(a \in \mathbb{R})$

$$(a, +\infty) \qquad (-\infty, a]$$

$$(a, b] = (a, +\infty) \cap (-\infty, b]$$

$$(a, c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a, c - \frac{1}{n}\right]$$



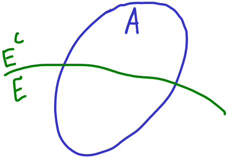
Ορισμό των μετρήσιμων συνόλων (οικογένεια $\mathcal{M}$)

$E \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο αν

$\geq$ ουσιώδης

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} : \quad m^*(A) = m^*(E \cap A) + m^*(E^c \cap A)$$

$\leq$ ισχύει πάντα



Θα δείξουμε ότι $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα, $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}$.

$G = (0,1)$

$q \in (0,1)$, $\bigcup_{q_n \in G} (q_n - \varepsilon_{q_n}, q_n + \varepsilon_{q_n})$ δεν είναι κατ' ανάγκη $= (0,1)$

$$\varepsilon_{q_n} = \frac{1}{10^n}$$

Αν $(0,1) = \bigcup_{q_n \in G} \underbrace{(q_n - \varepsilon_{q_n}, q_n + \varepsilon_{q_n})}$

$$1 = m^*(0,1) \leq \sum m^*(\quad) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^n} < 1$$

$\emptyset$ μετρήσιμο: $\quad \forall A \subseteq \mathbb{R}: \quad m^*(A) = m^*(\underbrace{A \cap \emptyset}_{\emptyset}) + m^*(\underbrace{A \cap \mathbb{R}}_{A})$

$$m^*(A) = 0 + m^*(A) \quad \checkmark$$

$\mathbb{R}$ μετρήσιμο $\quad \forall A \subseteq \mathbb{R} \quad m^*(A) = m^*(A \cap \mathbb{R}) + m^*(A \cap \emptyset)$

$$m^*(A) = m^*(A) + 0$$

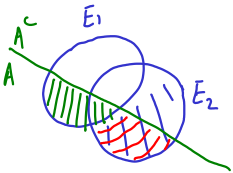
E μετρ. $\Longrightarrow$ E^c μετρ.

$\forall A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad m^*(A) = m^*(A \cap E^c) + m^*(A \cap E)$

$E_1, E_2, \dots$ μετρ. $\Rightarrow$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ μετρ.

E_1 , E_2 μετρ. $\quad \Longrightarrow \quad E_1 \cup E_2$ μετρ.

E_1^c μετρ.



$E_2 \setminus E_1 = E_2 \cap E_1^c$

$$m^*(A) = m^*\left(\boxed{A \cap (E_1 \cup E_2)}\right) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c)$$

$$m^*(A) = m^*(\underline{A \cap E_1}) + m^*(A \cap E_1^c)$$

$$\| $$

$$m^*(\underline{A \cap E_1^c \cap E_2}) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c)$$

$A \cap \underline{(E_1 \cup E_2)} \cap E_1 = A \cap E_1$

$A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1^c = A \cap E_1^c \cap E_2$

$$m^*(A\cap(E_1\cup E_2)) = m^*\underbrace{(A\cap E_1)} + m^*\underbrace{(A\cap E_1^c\cap E_2)}$$

Εφαρμ. ορισμό μετρησιμότητας με τυχαίο σύνολο το

$$A\cap(E_1\cup E_2)$$

και μετρήσιμο σύνολο το E_1.

$$m^*(A\cap(E_1\cup E_2)) = m^*(\underbrace{A\cap(E_1\cup E_2)\cap E_1}_{A\cap E_1}) + m^*(\underbrace{A\cap(E_1\cup E_2)\cap E_1^c}_{A\cap E_2\cap E_1^c})$$

Δείξαμε ότι E_1, E_2 μετρήσιμα $\Rightarrow E_1^c, E_2^c$ μετρ.

$\Rightarrow E_1 \cup E_2$ μετρ.

$\Downarrow$

$E_1^c \cup E_2^c$ μετρ.

$\Rightarrow E_1 \cap E_2$ μετρ. $\Leftarrow$ παίρνοντας συμπληρώματα

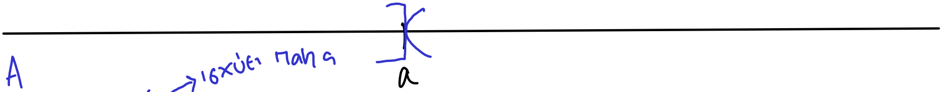
$\overset{\shortparallel}{(E_1^c \cap E_2^c)^c}$

$E_1, E_2, \ldots$ μετρ. $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ μετρ.

Άρα $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα.

Για να δείξουμε ότι $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}$ αρκεί να δείξουμε

$(a, +\infty) \in \mathcal{M}$.



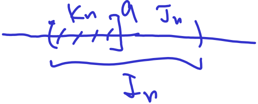
$\forall A$

$$m^*(A) \overset{\leq \text{ ισχύει πάντα}}{\underset{\geq}{=}} m^*\big(A \cap (a, +\infty)\big) + m^*\big(A \cap (-\infty, a]\big)$$

$m^*(A) \geq \Delta \Leftarrow$ αρκεί κάθε κάλυψη $A \subseteq \bigcup I_n$ να έχει

$\sum \ell(I_n) \geq \Delta$

Έστω $A \subseteq \bigcup I_n$ $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\dots = 0.111111$

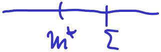


$$\to A\cap(a,+\infty) \subseteq \bigcup_n \overbrace{\left(I_n \cap (a,+\infty)\right)}^{J_n} = \bigcup_n J_n$$

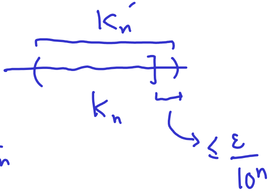
$\ell(J_n)+\ell(K_n)=\ell(I_n)$

$$A\cap(-\infty,a] \subseteq \bigcup_n \underbrace{\left(I_n\cap(-\infty,a]\right)} = \bigcup K_n \subseteq \bigcup K_n'$$

$\forall \varepsilon>0$ διαλέγω τα I_n ώστε $m^*(A) \geq \sum \ell(I_n)-\varepsilon$



$$\to m^*\left(A\cap(a,+\infty)\right) \leq \sum_n \ell(J_n)$$



$$m^*\left(A\cap(-\infty,a]\right) \leq \sum_n \ell(K_n') \leq \sum_n \ell(K_n)+\frac{\varepsilon}{10^n}$$

$$= \sum_n \ell(K_n) + 0.111\cdots\times\varepsilon$$

$$\underbrace{m^*(A \cap (a,+\infty)) + m^*(A \cap (-\infty, a])} \leq \sum \ell(I_n) + \varepsilon \cdot 0.111\ldots$$

$$\leq m^*(A) + \varepsilon + \varepsilon \cdot 0.111\ldots$$

$$= \underbrace{m^*(A) + \varepsilon \cdot 1.111\ldots} \quad \forall \varepsilon$$

$$m^*(A \cap (a,+\infty)) + m^*(A \cap (-\infty, a]) \leq m^*(A)$$

$$\mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}.$$