X μετρικός χώρος

Ορισμός

$K \subseteq X$ λέγεται συμπαγής αν κάθε ανοιχτή κάλυψη του K έχει πεπερασμένη υποκάλυψη:

Δηλ. αν $K \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$, G_i ανοιχτά στο X

τότε υπάρχει πεπερασμένο $J \subseteq I$ τ.ώ.

$$K \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i .$$

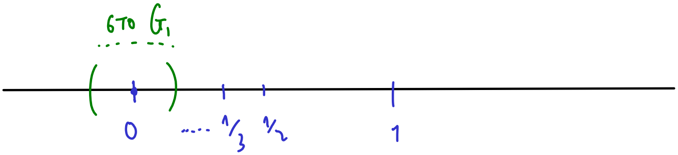
Πρόταση $K \subseteq X$ πεπερασμένο $\Longrightarrow$ K συμπαγές

$$K = \{k_1, k_2, \dots, k_N\} \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$$

$\forall \nu = 1 \dots N$ υπάρχει ένα $G_{i_\nu} \ni k_\nu$.

$\bigcup_{\nu=1}^{N} G_{i_\nu} \supseteq K$ γιατί περιέχει κάθε k_ν.

Πρόταση Το $A=\{0, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \dots\}$ είναι συμπαγές



Υποθέτω $A \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$, G_i ανοιχτά. Υπάρχει κάποιο που περιέχει το 0, π.χ. $G_1 \ni 0$.

ΑΝΟΙΧΤΟ στο $\mathbb{R}$ G ανοιχτό αν $\forall g \in G \ \exists\, \varepsilon > 0$ τ.ώ. $(g-\varepsilon, g+\varepsilon) \subseteq G$.

Υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ.ώ. $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq G_1$.

Αφού $\frac{1}{n} \to 0$ $\quad \exists\, n_0$ τ.ώ. $n \geq n_0 : \frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq G_1$

άρα $\left\{0, \frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0+1}, \dots\right\} \subseteq G_1$

Μένουν τα $1, \; 1/2, \; \dots, \; 1/n_0-1$

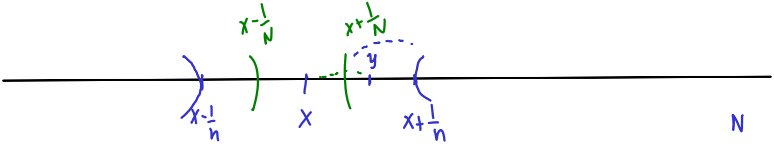
$1 \xrightarrow{\text{στό}} G_{i_1}$, $\quad 1/2 \xrightarrow{\text{στό}} G_{i_2}$, $\quad \dots, \quad 1/n_0-1 \xrightarrow{\text{στό}} G_{i_{n_0-1}}$

$$A \subseteq G_1 \cup G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_{n_0-1}}$$ πεπ. υποκάλυψη

Θεώρημα K συμπαγές στο $\mathbb{R}$ $\iff$ K κλειστό, φραγμένο

$\Rightarrow$ κλειστό. Έστω K δεν είναι κλειστό. Δηλ. υπάρχει ακολουθία $k_n \in K$ με $k_n \to x \notin K$.

$G_n := (-\infty, x-\frac{1}{n}) \cup (x+\frac{1}{n}, +\infty)$. Τότε $K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbb{R}\setminus\{x\}$



$G_n \subseteq G_{n+1}$

Ας είναι $G_1, \dots, G_N$ μια πεπερ. υποκάλυψη. Όμως $\bigcup_{n=1}^{N} G_n = G_N = (x-\frac{1}{N}, x+\frac{1}{N}$

Άτοπο γιατί μετά από κάποιο n_0 : $k_n \notin G_N$.

$\Rightarrow$ φραγμένο. $K \subseteq \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n)$ μία ανοιχτή κάλυψη του K

άρα έχει πεπερ. υποκάλυψη $\bigcup_{j=1}^{N} (-n_j, n_j) = (-n_N, n_N)$

$n_1 < n_2 < \dots < n_N$

άρα

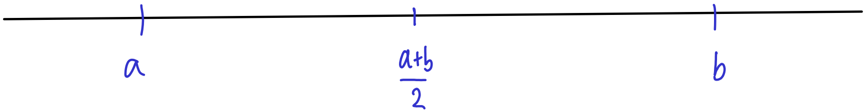
$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} (-n_j, n_j) = (-n_N, n_N)$, άρα φραγμένο.

$\Rightarrow$

$\Longleftarrow$ Έστω $K \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό, φραγμένο.

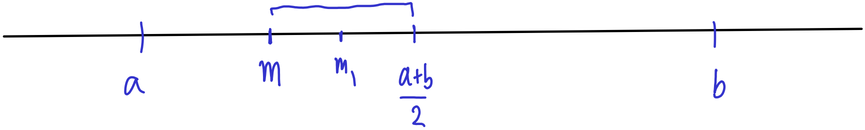
ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ : $K = [a, b]$

$K \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$, G_i ανοιχτά <u>ΕΣΤΩ ΟΧΙ</u>



$$[a,b] = \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \cup \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

<u>1η περ.</u> Και το $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, και το $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ έχουν πεπερασμένη κάλυψη από τα G_i. <u>OK</u>



<u>2η περ.</u> Κάποιο από τα $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη, έστω π.χ. το $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$.

Κάποιο από τα $[a, m]$, $\left[m, \frac{a+b}{2}\right]$ δεν έχει πεπερ. κάλυψη.

Έστω το $\left[m, \frac{a+b}{2}\right]$.

Επιλέγω κάθε φορά και περιορίζομαι στο μισό διάστημα που δεν έχει πεπερασμένη κάλυψη.

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq [a_4, b_4] \supseteq \dots$$

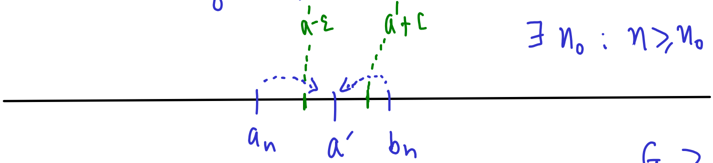
$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \longrightarrow 0$$

$a_n \uparrow$ $\quad b_n \downarrow$ $\quad$ Έστω $a' = \lim a_n$ $\quad b' = \lim b_n$

$$b' - a' = \lim b_n - \lim a_n = \lim (b_n - a_n) = 0$$

$a_n, b_n \longrightarrow a' \in [a, b]$ άρα a' ανήκει σε κάποιο G_i

Έστω $a' \in G_0$. Άρα $\exists\, \varepsilon > 0$ τ.ω. $(a'-\varepsilon, a'+\varepsilon) \subseteq G_0$



$\exists\, n_0 : n \geq n_0$ τότε $a_n, b_n \in (a'-\varepsilon, a'+\varepsilon) \subseteq G_0$

$G_0 \supseteq [a_n, b_n]$ ΑΤΟΠΟ

Έχουμε δείξει $[a, b]$ συμπαγές.

K κλειστό, φραγμένο $\qquad K \subseteq [a, b]$ (αφού φραγμένο)

$K = \bigcup_{i \in I} G_i$, G_i ανοιχτά. Παίρνω $G' = \mathbb{R} \setminus K$

ανοιχτό

$$G' \cup \bigcup_{i \in I} G_i = \mathbb{R} \supseteq [a, b]$$

Υπάρχουν πεπ. από αυτά που καλύπτουν το $[a, b]$ π.χ.

$$G' \cup G_1 \cup \dots \cup G_N \supseteq [a, b] \supseteq K \Rightarrow \underbrace{G_1 \cup \dots \cup G_N \supseteq K}_{\text{πεπερ. υποκάλυψη}}$$

Θεώρημα $K \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές $\Leftrightarrow$ K κλειστό, φραγμένο $\Leftrightarrow$

"$\forall k_n \in K$ υπάρχει υπακολουθία της k_n που συγκλίνει στο K"

(ακολουθιακή συμπάγεια)

κλειστό, φραγ $\Rightarrow$ ακολουθ. συμπαγές

Έστω $k_n \in K \subseteq [a,b]$ άρα υπάρχει υπακολουθία k_{n_r}, $r=1,2,\dots$

που συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$ (Bolzano-Weierstrass)

$$k_{n_r} \xrightarrow{r\to\infty} x \in K \quad (\text{αφού } K \text{ κλειστό})$$

$\Leftarrow$ ακολουθ. συμπάγεια $\Rightarrow$ κλειστό, φραγμένο.

· Έστω K όχι φραγμένο.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $K \setminus [-n, n]$ δεν είναι κενό, έστω k_n ένα στοιχείο του. Δηλ. $k_n \in K$, $|k_n| > n$

Αφού K ακολ. συμπαγές πρέπει η k_n να έχει συγκλ. υπακολουθία, άτοπο γιατί $|k_n| \to +\infty$.

· Έστω K όχι κλειστό. Δηλ. υπάρχει ακολ. $k_n \in K$ με $k_n \to x \notin K$.
Από ακολ. συμπάγεια υπάρχει υπακ. της k_n που συγκλίνει σε στοιχείο του K. Αφού $k_n \to x$, κάθε υπακ. της $k_n \to x$, άτοπο γιατί $x \notin K$

K κλειστό, φραγμένο $\Rightarrow$ K συμπαγές

ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ σε όλους τους μετρικούς χώρους

Υποθέτω "συμπαγές $\Rightarrow$ ακολ. συμπαγές".

$$X = \{ (a_1, a_2, a_3, \dots) : \underbrace{a_n \in \mathbb{R}, \text{ τ.ώ. } \exists M \in \mathbb{R} \ \forall n \ |a_n| \leq M}_{a_n \text{ φραγμένη ακολουθία}} \}$$

$a, b \in X$, $a = (a_1, a_2, \dots)$, $b = (b_1, b_2, \dots)$ ορίζω

$$d(a,b) = \sup_n |a_n - b_n| \in [0, +\infty)$$

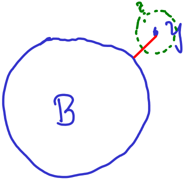
Τρ. ανισ. : $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$

$B \subseteq X \qquad B = \{(x_1, x_2, \dots) \in X : d(0,x) \leq 1\}$

$\forall n: \ |x_n| \leq 1$

B κλειστό γιατί B^c ανοιχτό γιατί αν $y \in B^c$ τότε

υπάρχει $\varepsilon > 0$: $\underbrace{\text{αν } d(y,z) < \varepsilon \implies z \in B^c}$



$y \in B^c \implies \sup |y_n| > 1 \implies \exists\, y_{n_0}$ με

$|y_{n_0}| = 1 + \delta \quad , \ \delta > 0.$

Παίρνω $\varepsilon = \delta/2$. $\quad d(y,z) < \delta/2$

$1+\delta = d(0,y) \leq d(0,z) + d(y,z) < d(0,z) + \delta/2 \implies 1 + \delta/2 < d(0,z) \implies z \in B^c$

Σε γενικό μετρ. χώρο: $A \subseteq X$ φραγμένο αν

$\exists\ x \in X\ ,\ r > 0\ :\ A \subseteq \underline{B(x;r)}$

μπάλα με κέντρο x ακτίνα r

$\forall a \in A : d(x,a) < r$.

Άρα B (ως μπάλα) είναι φραγμένο.

Η μοναδιαία μπάλα περιέχει ακολουθία χωρίς συγκλίνουσα υπακολουθία.

$$e_n = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow}{1}, 0, \dots) \in B$$

n-οστή θέση

$\forall m, n, \ m \neq n$

$$d(e_m, e_n) = 1$$

αντίφαση

$$e_{n_k} \to x \in X, \quad e_{n_{k+1}} \to x \qquad d(e_{n_k}, e_{n_{k+1}}) \to 0$$

$$m^*(E) = \inf_{E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n} \sum \underbrace{b_n - a_n}_{|I_n|}$$

$E \subseteq \mathbb{R}$

ανοιχτά διαστήματα $I_n = (a_n, b_n)$

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

υποπροσθετικότητα

$$A \subseteq B \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$$

μονοτονία

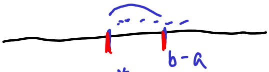
$\underline{\Theta}$ $\quad m^*([a,b]) = b-a$

Εύκολο: $\quad m^*([a,b]) \leq b-a$

Θέτω $I_1 = (a-\varepsilon, b+\varepsilon) \supseteq [a,b]$ δίνει $\quad m^*([a,b]) \leq b-a+2\varepsilon$

Μένει να δείξω $m^*([a,b]) \geq b-a$

Έστω όχι. Δηλ. $m^*([a,b]) < b-a$



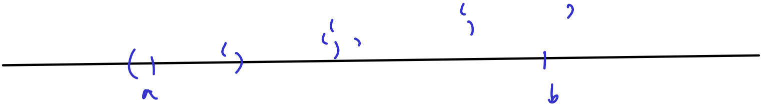
$m^* = \inf \dots\dots$

άρα υπάρχει μιά κάλυψη με ανοιχτά διαστήματα I_n

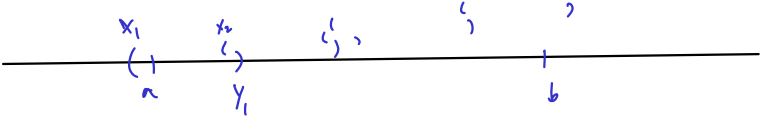
με $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < b-a$. Αφού $[a,b]$ συμπαγές υπάρχουν

$I_1, \dots, I_N$ τ.ώ. $[a,b] \subseteq I_1 \cup \dots \cup I_N$, $\sum_{\nu=1}^{N} |I_\nu| < b-a$

$I_\nu = (x_\nu, y_\nu)$, $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_\nu$ Επαγωγή ως προς N.



$N=1$ ✓



$x_1 < a$

$x_2 < y_1$

$$[y_1 , b] \subseteq (x_2 , y_2) \cup \dots \cup (x_N , y_N)$$

N-1 διαστήματα

$$b - y_1 \leq \sum_{\nu=2}^{N} y_\nu - x_\nu$$

$$\underline{b-a} < b - x_1 = b - \cancel{y_1} + \cancel{y_1} - x_1 \leq \underline{\sum_{\nu=1}^{N} y_\nu - x_\nu}$$

$$m^*(\emptyset) = 0$$

$$\emptyset \subseteq (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$$

$$m^*(\mathbb{R}) = +\infty$$

$$\forall N$$

$$\underset{[-N,N]}{\overset{\mathbb{R}}{\cup\!\!|}} \Longrightarrow m^*(\mathbb{R}) \geq m^*([-N, N]) = 2N$$

$$m^*(\mathbb{R}) = +\infty$$