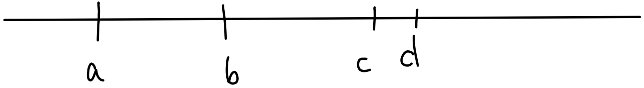
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

δεν είναι Riemann ολοκλ.



$$\ell([a,b]) = b-a$$

$$\ell([a,b] \cup [c,d]) = b-a+d-c$$

$$\ell(\mathbb{Q}) = ? \qquad \ell(\mathbb{Q}^c) = ?$$

συνολοσυνάρτηση

$$m(E) = \text{"μήκος"}$$

σύνολο

Εξωτερικό μέτρο συνόλου

$E \subseteq \mathbb{R}$ κάλυψη του E από ανοιχτά διαστήματα

$$E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \qquad I_n = (a_n, b_n)$$

$$m^*(E) = \inf_{\text{καλύψεις}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \right) \qquad |I_n| = b_n - a_n$$

$$E = \{x_0\} \qquad m^*(E) = 0$$

$$\inf_{E \subseteq \bigcup I_n} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |I_n|}_{\geqslant 0} = 0 \iff \text{υπάρχουν οσοδήποτε μικρές } \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ κάλυψη του E από ανοιχτά διαστήματα

$I_n = (a_n, b_n)$ τ.ώ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$$

$$I_1 = \left(x_0 - \frac{\varepsilon}{10}, x_0 + \frac{\varepsilon}{10}\right)$$

$$I_n = \left(0, \frac{\varepsilon}{10^n}\right) \quad n = 2, 3, \ldots$$

$$\frac{\varepsilon}{10^2} + \frac{\varepsilon}{10^3} + \frac{\varepsilon}{10^4} + \ldots = \frac{\varepsilon}{10^2} 1.11\ldots \leq \frac{4}{5}\varepsilon$$

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R} \qquad \underline{\underline{m^*(E) = 0}}$$

$$E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \qquad \sum |I_n| < \varepsilon$$

$$I_1 = \left(x_1 - \frac{\varepsilon}{10^1}, x_1 + \frac{\varepsilon}{10^1}\right)$$

$$I_2 = \left(x_2 - \frac{\varepsilon}{10^2}, x_2 + \frac{\varepsilon}{10^2}\right)$$

$$\vdots$$

$$I_N = \left(x_N - \frac{\varepsilon}{10^N}, x_N + \frac{\varepsilon}{10^N}\right)$$

$$n > N : I_n = \left(0, \frac{2\varepsilon}{10^n}\right)$$

$$\frac{2\varepsilon}{10} + \frac{2\varepsilon}{10^2} + \frac{2\varepsilon}{10^3} + \dots + \frac{2\varepsilon}{10^N} + \frac{2\varepsilon}{10^{N+1}} + \dots$$

$$= \frac{2\varepsilon}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots\right)$$

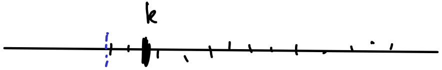
$$\frac{2\varepsilon}{10} \cdot 1.111\ldots \leq \varepsilon$$

Θ $A, B \subseteq \mathbb{R}$. $\quad m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$

Απ

$$\inf_{A \cup B \subseteq \bigcup I_n} \left(\sum |I_n| \right) \leq m^*(A) + m^*(B)$$

$$\inf \Omega \leq k$$



$$\Updownarrow$$

$\rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \omega \in \Omega$ τ.ω. $\omega \leq k + \varepsilon$

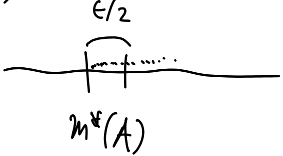
$$\Downarrow$$

$\inf \Omega \leq k + \varepsilon \quad \forall \varepsilon \Rightarrow \inf \Omega \leq k$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ κάλυψη του $A \cup B$, $\bigcup I_n$, τ.ώ.

$$\sum |I_n| \leq m^*(A) + m^*(B) + \varepsilon$$

$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \sum |A_n| \leq m^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}$



$B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \qquad \oplus \; \sum |B_n| \leq m^*(B) + \frac{\varepsilon}{2}$

$\bigcup A_n \cup B_n \supseteq A \cup B \qquad \sum |A_n| + |B_n| \leq m^*(A) + m^*(B) + \varepsilon$

$$E = \{x_1, \dots, x_N\} = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_N\}$$

$$m^*(E) \leq m^*\{x_1\} + m^*\{x_2\} + \dots + m^*\{x_N\} = 0 + \dots + 0 = 0$$

$\underline{\underline{\Theta}}$ $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots$ τότε $m^*(E) \leq \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)} + \varepsilon$

$$E_1 \subseteq \bigcup_n I_n^1 \; , \quad \sum_n |I_n^1| \leq m^*(E_1) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$E_2 \subseteq \bigcup_n I_n^2 \; , \quad \sum_n |I_n^2| \leq m^*(E_2) + \frac{\varepsilon}{4}$$

$\vdots$

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^k$$

Υποπροσθετικότητα του εξωτ. μέτρου

Μονοτονία εξωτ. μέτρου

$$A \subseteq B \Longrightarrow m^*(A) \leq \overline{m^*(B)}$$

οποιαδήποτε κάλυψη του B είναι και κάλυψη του A

—/—

$A \subseteq \mathbb{R}$ αριθμήσιμο, δηλ. $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, τότε $m^*(A) = 0$.

$$m^*(A) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\}\right) \underset{\text{υποπρ.}}{\leq} \sum_n m^*(\{a_n\}) = \sum_n 0 = 0$$

<u>Πόρισμα</u> $m^*(\mathbb{Q}) = 0$.

$\mathbb{Q} = \{ q_1, q_2, q_3, \dots \}$ είναι αριθμ. σύνολο

$\frac{m}{n}$ $\quad m \geq 0, \quad n > 0$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\frac{0}{1}^{\,1} & \frac{1}{1}^{\,2} & \frac{2}{1}^{\,4} & \frac{3}{1}^{\,7} & \frac{4}{1} & \cdots & \\
\frac{0}{2}^{\,3} & \frac{1}{2}^{\,5} & \frac{2}{2}^{\,8} & \frac{3}{2} & \cdots & & \\
\frac{0}{3}^{\,6} & \frac{1}{3}^{\,9} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & & \\
0^{\,10} & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

$$\frac{m}{n} \qquad m \in \mathbb{Z}, \quad n > 0$$

$$Q_r = \left\{ \frac{m}{n} : |m| \leq r, 1 \leq n \leq r \right\} \subseteq \mathbb{Q}$$

$$\left[\mathbb{Q} = \bigcup_{r=1}^{\infty} Q_r \right]$$

Q_r πεπερασμένο $\qquad |Q_r| \leq (2r+1) \cdot r$

Πολυώνυμο: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_d x^d$

Αλγεβρικός αριθμός: ρίζα πολυωνύμου με ακεραίους συντελεστές

$\frac{m}{n}$ $\quad nx - m = 0$

$\sqrt{2}$ $\quad x^2 - 2$

$\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$

e, π δεν είναι αλγεβρικοί

Αλγεβρικοί είναι αριθμήσιμοι

A = το σύνολο των αλγ. αριθμών

$$A = \bigcup_{r=1}^{\infty} A_r \dashrightarrow \text{πεπερασμένα}$$

$A_r = \{ a \in A :$ είναι ρίζα πολ/μου με ακεραίους συντελεστές $|\cdot| \leqslant r$, και βαθμού $\leq r \}$

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k \qquad k \leq r$$

$2r+1 \quad 2r+1 \quad 2r+1 \qquad r+1$ επιλογές

A = όλες οι ακολουθίες από 0 ή 1 όχι αριθ.

0101100 . . . . .

A_π = όλες οι πεπερασμένες ακολουθίες από 0 ή 1 αριθ.

01001101

$$A_\pi = \bigcup_{r=1}^{\infty} A_{\pi,r}$$

2^r στοιχεία

$A_{\pi,r}$ = πεπερ. ακολουθίες μήκους r.

A = όλες οι ακολουθίες από 0 ή 1 $\qquad \bar{0} = 1$

δεν είναι αριθμήσιμο $\qquad \bar{1} = 0$

Έστω όχι, δηλ. $A = \{ \underbrace{a^1}_{\text{ακολουθία}}, a^2, a^3, \dots \}$

$X = \overline{a^1_1}\ \overline{a^2_2} \cdots \overline{a^k_k} \cdots$

$a^1 : \quad a^1_1, a^1_2, a^1_3, \dots$

$a^2 : \quad a^2_1, a^2_2, a^2_3, \dots$

$\vdots$

$\to a^k \quad a^k_1, a^k_2, a^k_3, \dots, a^k_k, \dots$

Διαγώνιο επιχείρημα του Cantor

$\mathbb{R}$ δεν είναι αριθμ.

$E + x = \{ e + x : e \in E \}$ μεταφορά του E κατά x

$m^*(E + x) = m^*(E)$ αναλλοίωτο ως προς μεταφορές

$\lambda > 0$: $\lambda E = \{ \lambda \cdot e : e \in E \}$

περιττή υπόθεση

$$m^*(\lambda E) = |\lambda| \, m^*(E)$$

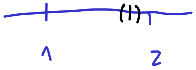
Σκοπός:

$$m^*\big((a,b)\big) = b-a$$

Συμπαγή σύνολα στο $\mathbb{R}$

$G \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό $\qquad \forall x \in G \ \exists \varepsilon > 0 \quad (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq G$

$(1,2)$



$(1,2]$ δεν είναι ανοιχτό

$x=2 \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad (2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \not\subseteq (1,2]$

$K \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό $\Leftrightarrow$ $K^c = \mathbb{R} \setminus K$ ανοιχτό

$\Leftrightarrow$ (Αν $x_n \in K$, $x_n \to x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in K$)

Συμπαγή

$F \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται συμπαγές αν

"κάθε ανοιχτή κάλυψη του F έχει πεπερ. υποκάλυψη"

$$F \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i \longrightarrow \text{κάλυψη από ανοιχτά}$$

ανοιχτά

υποκάλυψη $\quad F \subseteq \overbrace{G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_N}}^{\text{πεπερασμένη υποκάλυψη}}$

$F \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές <u>ανν</u> έχει την ιδιότητα

κάθε $x_n \in F$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

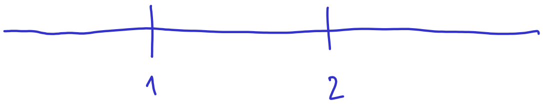
σε στοιχείο του F.

Θ

$1 \notin (1,2]$

$\uparrow$

$x_n = 1 + \frac{1}{n} \in (1,2]$



$[1, 2]$ συμπαγές

$(1, 2]$ όχι συμπαγές