1. Βάλτε ό,τι πρόσημο θέλετε μπροστά από κάθε αριθμό του συνόλου $\{1, 2, \ldots, 10\}$ και προσθέστε τους. Δείξτε ότι ποτέ δε θα πάρετε 0.

2. Δίδονται 5 σημεία στο επίπεδο με ακέραιες συντεταγμένες. Δείξτε ότι για κάποιο ζεύγος από αυτά το μέσο σημείο του ευθυγράμμου τμήματος που ορίζουν έχει επίσης ακέραιες συντεταγμένες.

3. Δείξτε ότι το γινόμενο 4 διαδοχικών φυσικών αριθμών (≥ 1) δεν είναι ποτέ τέλειο τετράγωνο.

4. Αν $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ (πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές) και $a, b \in \mathbb{Z}$ δείξτε ότι $b - a \mid p(b) - p(a)$.

5. Δείξτε ότι δεν υπάρχει τριάδα πρώτων αριθμών της μορφής $p, p+2, p+4$ εκτός από την τριάδα 3, 5, 7.

6. Αν $k \in \mathbb{N}$ περιττός δείξτε ότι $2^{n+2} \mid k^{2^n} - 1$ για $n \in \mathbb{N}$.

7. Δείξτε ότι το γινόμενο n διαδοχικών φυσικών αριθμών διαιρείται από το $n!$.

8. Βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς που μπορούν να γραφούν στη μορφή $r + \frac{1}{r}$, όπου $r \in \mathbb{Q}$.

9. Δείξτε ότι κάθε τετράγωνο μπορεί να χωριστεί σε n τετράγωνα (όχι απαραίτητα με το ίδιο μήκος πλευράς) για κάθε $n \geq 4$.

10. Αν $x \neq 0$, $1 \leq k \in \mathbb{N}$ και $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ δείξτε ότι και $x^k + \frac{1}{x^k} \in \mathbb{Z}$.

11. Έχουμε n πόλεις και κάποια ζεύγη πόλεων συνδέονται μεταξύ τους με δρόμους (διπλής κατεύθυνσης). Είναι έτσι φτιαγμένο το δίκτυο των δρόμων ώστε να μπορεί κανείς να πάει από οποιαδήποτε πόλη σε οποιαδήποτε άλλη με μια ακριβώς, μοναδική διαδρομή (εννοείται χωρίς να πηγαίνει μπρος-πίσω). Δείξτε ότι ο αριθμός των δρόμων είναι $n - 1$.

12. (α) Δείξτε ότι κάθε ακολουθία φυσικών αριθμών έχει αύξουσα υπακολουθία.
(β) Αν έχουμε k ακολουθίες φυσικών αριθμών τότε υπάρχει ακολουθία φυσικών αριθμών $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ τ.ώ. κάθε μια από τις k ακολουθίες που μας έχουν δοθεί είναι αύξουσα αν περιοριστεί πάνω στην ακολουθία δεικτών n_k. Αν π.χ. a_n είναι μια από τις k ακολουθίες τότε $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα.

13. 120 τετράγωνα 1×1 είναι τοποθετημένα μέσα σε ένα ορθογώνιο 20×25. Η θέση και η κατεύθυνσή τους μπορεί να είναι οποιαδήποτε. Δείξτε ότι όπως και να είναι τοποθετημένα είναι δυνατό κάποιος να τοποθετήσει στο εσωτερικό του ορθογωνίου ένα δίσκο περιφέρειας 1 ώστε να μην τέμνει κανένα από τα τετράγωνα αυτά.

14. Στο επίπεδο έχουμε 5 κύκλους. Κάθε 4 από αυτούς έχουν ένα κοινό σημείο. Δείξτε ότι υπάρχει σημείο που ανήκει και στους 5 κύκλους.

15. Μια άπειρη αριθμητική πρόοδος από φυσικούς αριθμούς περιέχει ένα τέλειο τετράγωνο. Δείξτε ότι περιέχει άπειρα τέλεια τετράγωνα.

16. Δείξτε ότι αν $m \geq 1$ είναι ακέραιος τότε ο αριθμός $m(m+1)$ δεν είναι ποτέ δύναμη ακεραίου (δεν είναι δηλ. της μορφής k^n, για $k, n > 1$).

17. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός από τετράεδρα στα οποία μπορούμε να διαμερίσουμε ένα κύβο;

18. Οι ακέραιοι $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι 0, -1 ή +1. Ποια είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το άθροισμα

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j;$$

19. Έχουμε $2n$ παιδιά παρατεταγμένα σε δύο σειρές των n ατόμων, μια σειρά πίσω και μια μπροστά της (σα να είναι να βγάλουν φωτογραφία). Είναι έτσι βαλμένα ώστε κάθε παιδί της πίσω γραμμής είναι ψηλότερο από το μπροστινό του παιδί. Δείξτε ότι αν διατάξουμε τις δύο σειρές εσωτερικά σε αύξουσα σειρά ύψους τότε η ιδιότητα αυτή διατηρείται (και πάλι δηλ. κάθε παιδί είναι ψηλότερο από το μπροστινό του).

20. Ένα κυρτό πολύγωνο έχει εμβαδό A και περίμετρο P. Δείξτε ότι περιέχει στο εσωτερικό του κάποιο κύκλο ακτίνας A/P (επιτρέπεται ο κύκλος να ακουμπάει σε ακμές).

21. Σε 4 σημεία στο επίπεδο βρίσκονται 4 φάροι. Καθένας από αυτούς παράγει μια γωνία φωτός με άνοιγμα $\pi/2$ και η οποία εκτείνεται μέχρι το άπειρο. Κάθε φάρος μπορεί να περιστρέψει τη γωνία του όπως θέλει. Δείξτε ότι μπορούμε πάντα να περιστρέψουμε τις γωνίες φωτός των 4 φάρων ώστε να φωτίσουμε ολόκληρο το επίπεδο.

22. Ένα οκτάγωνο στο επίπεδο έχει όλες του τις γωνίες ίσες και όλες του οι πλευρές έχουν ακέραιο μήκος. Δείξτε ότι οι απέναντι πλευρές έχουν το ίδιο μήκος.

23. (α) Δίδονται οι φυσικοί αριθμοί $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ μέσα στο σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$. Έχουν την ιδιότητα ότι όλα τα αθροίσματα

$$a_i + a_j, \quad 1 \le i \le j \le k,$$

είναι διαφορετικά. Δείξτε ότι $k \le C\sqrt{n}$ για μια αρκετά μεγάλη σταθερά C. Ισοδύναμα $n \ge C'k^2$ για μια κατάλληλη σταθερά C'.
(β) Δείξτε ότι υπάρχει άπειρη ακολουθία a_k, $k = 1, 2, \ldots$, που έχει την ιδιότητα των διαφορετικών αθροισμάτων (όπως στο (α)) και τέτοια ώστε για κάθε k να ισχύει $a_k \le C''k^3$, για μια κατάλληλη σταθερά C''.

24. Το σύνολο $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ έχει $|A| \ge 0.9n$. Σχηματίζουμε το σύνολο όλων των διαφορών

$$A - A = \{x - y : \ x, y \in A\}.$$

Δείξτε ότι για κάποια σταθερά C (δεν εξαρτάται από το A ή το n δηλαδή) το σύνολο $\mathbb{Z} \cap [-Cn, Cn]$ περιέχεται στο $A - A$.

25. Ένα σύνολο ακεραίων A λέγεται «ελεύθερο αθροισμάτων» αν δεν υπάρχουν δύο στοιχεία του (ενδεχομένως και ίδια μεταξύ τους) που το άθροισμά τους να ισούται με κάποιο στοιχείο του. Με άλλα λόγια αν η εξίσωση $x + y = z$ δεν έχει λύση με $x, y, z \in A$. Πόσο μεγάλο είναι το μεγαλύτερο υποσύνολο του $\{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$ που είναι ελεύθερο αθροισμάτων;

26. Αν $a_1, a_2, \ldots, a_n$ και $b_1, b_2, \ldots, b_n$ είναι δύο πεπερασμένες ακολουθίες πραγματικών αριθμών και σ είναι μια μετάθεση του $\{1, 2, \ldots, n\}$ ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το άθροισμα

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_{\sigma(j)};$$