1. Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $N \in \mathbb{N}$ βρείτε τους συντελεστές Fourier της συνάρτησης $f(Nx)$ μέσω αυτών της $f(x)$.

2. Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(nt)\, dt = \widehat{f}(0)\widehat{g}(0).$$

Δείξτε το πρώτα για f τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Μετά χρησιμοποιήστε την πυκνότητα των τριγωνομετρικών πολυωνύμων στο $L^1(\mathbb{T})$. Η άσκηση 1 θα σας είναι χρήσιμη.

3. Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και $0 < \sigma < 1$ δείξτε ότι η ακολουθία $\{an^\sigma\}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, 1]$. ($\{x\}$ συμβολίζει το κλασματικό μέρος του $x \in \mathbb{R}$.)

Χρησιμοποιήστε το κριτήριο του Weyl. Προσεγγίστε το άθροισμα $\sum_{n=1}^N e^{2\pi i k \{an^\sigma\}} = \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k a n^\sigma}$ από το ολοκλήρωμα $\int_1^N e^{2\pi i k a x^\sigma}\, dx$ και εκτιμήστε τη διαφορά τους χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής σε κάθε διάστημα της μορφής $[i, i+1]$.