1. Αν $m(A) = 1$ και $f \in L^\infty(A)$ δείξτε ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Έστω $\epsilon > 0$ και
$$E = \{x \in A : |f(x)| \ge (1-\epsilon)\|f\|_\infty\}.$$
Τότε $m(E) > 0$ (αλλιώς το esssup$|f|$ θα ήταν μικρότερο) και $\|f\|_p \ge (\int_E |f|^p)^{1/p}$.

2. Έστω $0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_N$ πραγματικοί αριθμοί. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$$x \to e^{i\lambda_j x}, \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$
είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Πάρτε n-οστή παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \sum_{j=1}^N c_j e^{i\lambda_j x}$ για πολύ μεγάλο n. Αν η f είναι ταυτοτικά μηδέν στο $\mathbb{R}$ τότε και η $f^{(n)}$ είναι ταυτοτικά μηδέν. Δείξτε ότι αυτό μπορεί να γίνει μόνο με όλα τα c_j ίσα με 0.

3. Έστω $G \subseteq \mathbb{R}$ προσθετική υποομάδα. Αν η G έχει κάποιο σημείο συσσώρευσης στο $\mathbb{R}$ δείξτε ότι είναι πυκνή στο $\mathbb{R}$, δηλ. ότι μπορείτε να βρείτε στοιχείο της G σε οποιοδήποτε διάστημα.

4. (i) Αν $a_n, b_n, n = 1, 2, \ldots, N$ είναι μιγαδικοί αριθμοί και $B_k = \sum_{n=1}^k b_n$ δείξτε τον πολύ χρήσιμο τύπο της <u>άθροισης κατά μέρη</u> (που είναι το ανάλογο για αθροίσματα του τύπου της ολοκλήρωσης κατά μέρη)
$$\sum_{n=M}^N a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.$$
(ii) Αν $a_n \to 0$ είναι φθίνουσα ακολουθία και τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_n b_n$ είναι φραγμένα τότε η σειρά $\sum_n a_n b_n$ συγκλίνει.