1. Έστω $f(x) = \max\{0, x\}$ για $x \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ολοκληρώματος Lebesgue για μη αρνητικές συναρτήσεις δείξτε ότι $\int f = +\infty$.

2. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to [0, +\infty]$ είναι τέτοια ώστε

$$\int_A e^f < \infty$$

δείξτε ότι

$$m\{f \geq \lambda\} \leq \frac{C}{e^\lambda}$$

για μια σταθερά C που δεν εξαρτάται από το $\lambda > 0$.

3. Αν $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ και $E_1, E_2, \ldots \subseteq \mathbb{R}$, $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$, τότε

(1) Αν τα E_j είναι ανά δύο ξένα δείξτε ότι

$$\int_E f = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f.$$

(2) Αν $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \cdots$ δείξτε ότι

$$\int_E f = \sup \int_{E_n} f.$$

Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης.

4. Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ (όχι απαραίτητα μη αρνητική) δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} f = \int f.$$