1. Ας είναι $q_1, q_2, \ldots$ μια απαρίθμηση του συνόλου $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Ορίζουμε το σύνολο

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n - \frac{1}{10^n}, q_n + \frac{1}{10^n}).$$

Δείξτε ότι το σύνολο $[0,1] \setminus E$ είναι μη κενό.

2. Ορίζουμε το σύνολο $A \subseteq [0,1]$ ως εξής. Ορίζουμε $A_0 = [0,1]$ και, για $n = 1, 2, 3, \ldots$, ορίζουμε το σύνολο A_n να είναι ότι απομένει από το σύνολο A_{n-1} αν από κάθε ένα από τα διαστήματα που απαρτίζουν το A_{n-1} αφαιρέσουμε το μεσαίο 1/5 του διαστήματος. Αφού έχουμε ορίσει τα A_n ορίζουμε τέλος $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$. Δείξτε ότι $m(A) = 0$.

3. Λέμε ότι ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}$ είναι τύπου G_δ αν είναι αριθμήσιμη τομή ανοιχτών, αν υπάρχουν δηλ. ανοιχτά σύνολα $G_n \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $S = \bigcap_n G_n$. Αν $E \subseteq \mathbb{R}$ δείξτε ότι υπάρχει G_δ σύνολο $S \supseteq E$ τέτοιο ώστε $m(S \setminus E) = 0$.