

Παραδώστε τις λύσεις στο μάθημα της Πέμπτης 20/2/2020. Γράφετε σύντομα και περιεκτικά.

1. Δύο συναρτήσεις $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ θεωρούνται «ίδιες» αν διαφέρουν σε σύνολο μέτρου 0. Δείξτε ότι αυτό είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Δείξτε έπειτα ότι αν $1 \leq p < \infty$ και $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ με $\|f - g\|_p = 0$ τότε οι f, g είναι «ίδιες».
2. Αν $m(A) = 1$ και $f \in L^\infty(A)$ δείξτε ότι $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

💡 Έστω $\epsilon > 0$ και

$$E = \{x \in A : |f(x)| \geq (1 - \epsilon)\|f\|_\infty\}.$$

Τότε $m(E) > 0$ (αλλιώς το $\text{esssup}|f|$ θα ήταν μικρότερο) και $\|f\|_p \geq (\int_E |f|^p)^{1/p}$.