

Παραδώστε τις λύσεις μέχρι την 20/5/2020. Δείτε οδηγίες παράδοσης στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

1. Αν $E \subseteq [0, 2\pi]$ και $\xi_n \in \mathbb{R}$ είναι οποιαδήποτε ακολουθία δείξτε ότι

$$\int_E \cos^2(nx + \xi_n) dx \rightarrow \frac{1}{2}|E|.$$

💡 Χρησιμοποιήστε το Λήμμα Riemann-Lebesgue .

2. Αν $0 < \alpha < \beta < 1$ κατασκευάστε μια συνάρτηση f που να είναι Lip- α αλλά όχι Lip- β .

3. Αν μια συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$ είναι Lipschitz- α για κάποιο $\alpha > 1$ δείξτε ότι η συνάρτηση είναι αναγκαστικά σταθερή.

💡 Αν $x \neq y$ δείξτε ότι $g(x) = g(y)$ γράφοντας

$$|g(x) - g(y)| \leq |g(x) - g(x + \delta)| + |g(x + \delta) - g(x + 2\delta)| + \dots + |g(x + (n - 1)\delta) - g(y)|,$$

όπου $\delta = (y - x)/n$.