Πανεπιστημιο Κρητησ – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Θ. Πιθανοτήτων (μεταπτ.) - Άνοιξη 2025-26 - Φυλλάδιο Ασκήσεων 3 - Μ. Κολουντζάκης

Τελευταία ενημέρωση: 6 Μαρτίου 2026

---

1 Στο μάθημα της Τετάρτης 4/3/2026 δείξαμε ότι αν πάρουμε ένα τυχαίο σύνολο φυσικών αριθμών E επιλέγοντας για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αν θα το βάλουμε μέσα στο E ή όχι ρίχνοντας ένα νόμισμα με πιθανότητα κορώνας ίση με p (ανεξάρτητα για όλα τα $n \in \mathbb{N}$) τότε σχεδόν σίγουρα η πυκνότητα του E

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|E \cap \{1, 2, \ldots, n\}|$$

υπάρχει και ισούται με p. Παίρνοντας αυτό το αποτέλεσμα ως δεδομένο δείξτε ότι εύκολα αυτό συνεπάγεται ότι σχεδόν σίγουρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $r \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|E \cap \{r+k, r+2k, \ldots, r+nk\}| = p.$$

2 Οι ΤΜ $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, έχουμε $X_j = \pm 1$ και $\mathbb{E}[X_j] = 0$.

(α) Για $\lambda > 0$ δείξτε ότι $\mathbb{E}\left[e^{\lambda X_j}\right] \le e^{\lambda^2/2}$.

(β) Έστω $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Δείξτε ότι αν $a > 0$ τότε

$$\mathbb{P}[S_n > a] \le e^{\lambda^2 n/2 - \lambda a}$$

για κάθε $\lambda > 0$.

(γ) Χρησιμοποιώντας κατάλληλο λ στο προηγούμενο δείξτε ότι

$$\mathbb{P}[|S_n| > a] < 2e^{-a^2/n}.$$

(δ) Εκτιμήστε την πιθανότητα $\mathbb{P}[|S_n| > \epsilon]$ με δύο τρόπους: με την ανισότητα Chebyshev και με την ανισότητα στο (γ). Κάθε μια από αυτές τις δύο εκτιμήσεις οδηγεί σε μια ελάχιστη τιμή που πρέπει να έχει το n ώστε η πιθανότητα αυτή να είναι μικρότερη από π.χ. $1/10$. Συγκρίνετε αυτές τις δύο τιμές του n.

3 Ας είναι X μια πραγματική ΤΜ και Y μια πραγματική ΤΜ για την οποία $d\mu_Y = f(x)\,dx$ με f μετρήσιμη και θετική παντού.

(α) Δείξτε ότι $F_Y(t)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής.

(β) Ορίζουμε την ΤΜ $Z = \Delta_\epsilon X + (1-\Delta_\epsilon)Y$, όπου η ΤΜ Δ_ϵ είναι ανεξάρτητη από τις X, Y και $\Delta_\epsilon = 1$ με πιθανότητα $1-\epsilon$ και $\Delta_\epsilon = 0$ με πιθανότητα ϵ. Βρείτε την $F_Z(t)$

συναρτήσει των $F_X(t), F_Y(t), \epsilon$. (Η ΤΜ Z ονομάζεται μίξη (mixture) των X, Y.)

(γ) Δείξτε ότι $|F_X(t) - F_Z(t)| \leq 2\epsilon$ για κάθε t και η $F_Z(t)$ είναι γνησίως αύξουσα. Αν $F_X(t)$ είναι συνεχής τότε και η $F_Z(t)$ είναι συνεχής.

4 Άσκηση 2.2.1 από D.

5 Άσκηση 2.2.2 από D.