Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Τελευταία ενημέρωση: 13 Φεβρουαρίου 2026

---

1 Έστω Σ όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που είναι αριθμήσιμα ή έχουν αριθμήσιμο συμπλήρωμα. Δείξτε ότι το Σ είναι σ-άλγεβρα.

2 Αν $A \subseteq \mathbb{N}$ λέμε ότι το A έχει *ασυμπτωτική πυκνότητα* α αν $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A \cap \{1, \ldots, n\}| = \alpha$. Έστω $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ όλα τα σύνολα που έχουν ασυμπτωτική πυκνότητα. Είναι το Σ σ-άλγεβρα;

3 Αν η συνάρτηση κατανομής $F(t)$ της πραγματικής ΤΜ X είναι συνεχής δείξτε ότι η ΤΜ $Y = F(X)$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, 1]$.

4 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Υπόδειξη: Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ με δύο τρόπους, ένας από τους οποίους με πολικές συντεταγμένες.

5 Έστω ακολουθία A_n ενδεχομένων σε ένα χώρο πιθανότητας Ω με $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] < \infty$. Δείξτε ότι

$$\mathbb{P}[\omega \in \Omega : \omega \text{ ανήκει σε άπειρα } A_n] = 0.$$

6 Ρίχνουμε ένα τίμιο νόμισμα 10 φορές. Βρείτε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων.
(α) Ο αριθμός των κεφαλών και ο αριθμός των γραμμάτων είναι ίσοι.
(β) Υπάρχουν περισσότερες κεφαλές από γράμματα.
(γ) Η i-οστή ρίψη και η $(11 - i)$-οστή ρίψη είναι οι ίδιες για $i = 1, \ldots, 5$.
(δ) Φέρνουμε τουλάχιστον 4 συνεχόμενες κεφαλές.

7 Επιλέγω έναν αριθμό ομοιόμορφα τυχαία από το εύρος $[1, 10^6]$. Χρησιμοποιώντας την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, προσδιορίστε την πιθανότητα ο αριθμός που επιλέχθηκε να είναι διαιρετός από έναν ή περισσότερους εκ των 4, 6 και 9.

8 Ρίχνω ένα συνηθισμένο ζάρι 10 φορές. Ποια η πιθανότητα ότι το άθροισμα των ρίψεων διαιρείται από το 6;

9 Σε ένα πολυσύχναστο τελωνείο φτάνει ένα έγγραφο από τη διοίκηση που ζητά να γίνονται τυχαίοι έλεγχοι στα εισερχόμενα για τυχόν απαγορευμένα εμπορεύματα.

Για λόγους νομικούς η διοίκηση ζητά να κρατούνται για έλεγχο κάθε μέρα «100 αντικείμενα επιλεγμένα απολύτως τυχαία από τα αντικείμενα της ημέρας».

Ο διευθυντής του τελωνείου είναι πολύ προβληματισμένος αφού δεν ξέρει πώς να επιλέξει αυτά τα 100 αντικείμενα τυχαία χωρίς να περιμένει να μπουν μέσα όλα τα εμπορεύματα της ημέρας. Αν ήξερε στην αρχή της ημέρας πόσα αντικείμενα θα μπουν θα μπορούσε να κάνει την τυχαία επιλογή του το πρωί, και να ξέρει ποια αντικείμενα θα πρέπει να κρατήσει για έλεγχο και ποια να διεκπεραιώσει αμέσως.

Όμως δεν ξέρει. Κατά τη διάρκεια της ημέρας φθάνουν αντικείμενα για επεξεργασία στην υπηρεσία του απροειδοποίητα και δεν έχει χώρο να κρατήσει πάνω από 100 αντικείμενα στην αποθήκη του.

Τι θα πρέπει να κάνει;

10 Μια μετάθεση του $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ είναι μια 1-1 απεικόνιση $\pi : [n] \to [n]$. Επιλέγουμε μια τέτοια ομοιόμορφα από όλες τις μεταθέσεις και έστω X το πλήθος των σταθερών της σημείων (τα σημεία i που έχουν $\pi(i) = i$). Υπολογίστε την $\mathbb{E}X$.

Υπόδειξη: Γράψτε $X = I_1 + \cdots + I_n$ όπου οι I_j είναι κατάλληλες δείκτριες (με τιμές 0 ή 1 δηλαδή) ΤΜ.