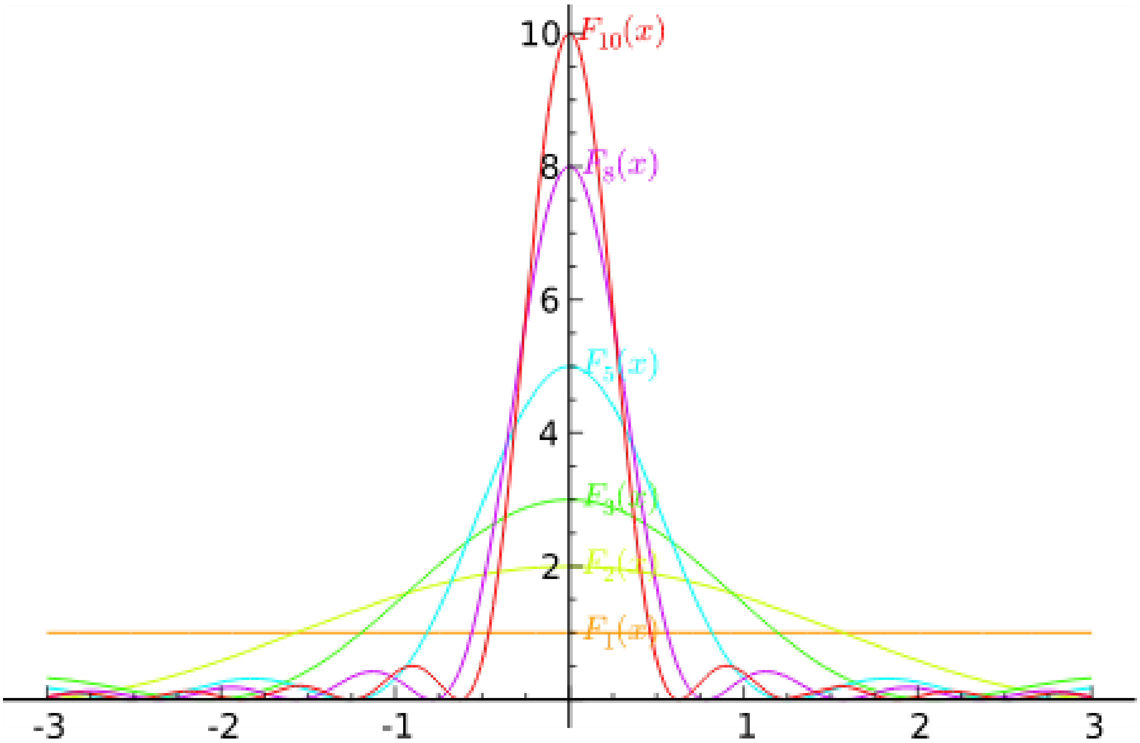
ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER



Μιχάλης Κολουντζάκης και Χρήστος Παπαχριστόδουλος

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Βούτες
700 13 Ηράκλειο

Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

HEALLINK
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

New! Έκδοση της 9 Ιανουαρίου 2022 New!

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η τελευταία έκδοση του βιβλίου αυτού θα βρίσκεται στη θέση

https://eigen-space.org/mk/fourierbook

Υλικό που έχει προστεθεί τελευταία (μετά την 1/1/2020) σημειώνεται με το σύμβολο 

και γίνεται προσπάθεια να μην αλλάξει η αρίθμηση του παλαιού υλικού (ασκήσεις, θεωρήματα κλπ) εκτός φυσικά από τον αριθμό σελίδας.

Το βιβλίο αυτό Ανάλυσης Fourier έχει σκοπό να καλύψει ένα εξαμηνιαίο προπτυχιακό μάθημα σε αυτό που καλείται συνήθως κλασική ανάλυση Fourier με έμφαση στις περιοδικές συναρτήσεις (ανάλυση Fourier στον κύκλο, όπως συνήθως λέμε).

Σε προπτυχιακό επίπεδο συνήθως δε μπορεί κανείς να στηριχτεί σε γνώση του μέτρου και ολοκληρώματος Lebesgue και συνήθως στηρίζεται κανείς στο ολοκλήρωμα Riemann επιλογή η οποία «πληρώνεται» με αρκετές αναίτιες, κατά τα άλλα, τεχνικότητες στην παρουσίαση και τροποποίηση αποδείξεων επί το πολυπλοκότερο και πιο αφύσικο. Γι' αυτούς τους λόγους έχουμε επιλέξει το πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου να είναι μια γρήγορη εισαγωγή του μέτρου και ολοκληρώματος Lebesgue χωρίς τις περισσότερες τεχνικές αποδείξεις (που βλέπει κανείς όταν πάρει ένα κανονικό μάθημα για το μέτρο Lebesgue) αλλά με έμφαση στον τρόπο χρήσης του ολοκληρώματος και την εξοικείωση με τις «φυσιολογικές» ιδιότητες και την καλή συμπεριφορά του ολοκληρώματος Lebesgue που αποτελούν και τους λόγους για τους οποίους χρησιμοποιείται. Το επιθυμητό αποτέλεσμα του πρώτου κεφαλαίου είναι, με άλλα λόγια, να μάθει ο φοιτητής να χρησιμοποιεί το ολοκλήρωμα Lebesgue χωρίς κατ' ανάγκη να έχει περάσει από την αυστηρή θεμελίωσή του (εξ ου και ο τίτλος «Εγχειρίδιο Χρήσης»). Αναμένουμε ότι το εγχειρίδιο αυτό χρήσης μπορεί να είναι χρήσιμο και σε άλλα μαθήματα ανάλυσης ή διαφορικών εξισώσεων πέραν της ανάλυσης Fourier.

Το βιβλίο καλύπτει τις βασικές έννοιες των σειρών Fourier με κεντρικό ερώτημα το ερώτημα της σύγκλισης της σειράς Fourier μιας συνάρτησης στην ίδια τη συνάρτηση.

Ευχαριστίες

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον Αντώνη Τσολομύτη (Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου) για τις πολλές και χρήσιμες παρατηρήσεις του για το κείμενο (κατά τη διάρκεια της χρήσης του κειμένου ως διδακτικό βοήθημα, την Άνοιξη του 2019-20).

Κεφάλαιο 1

Μέτρο και ολοκλήρωμα Lebesgue: Εγχειρίδιο χρήσης.

Κύριες βιβλιογραφικές αναφορές για αυτό το Κεφάλαιο είναι οι Stein and Shakarchi 2009 και Wheeden 2015.

1.1 Μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$

Αν $E \subseteq \mathbb{R}$ το μέτρο (Lebesgue) του E, που το συμβολίζουμε με $m(E)$ ή με $|E|$ είναι μια γενίκευση της έννοιας του μήκους. Αν $E = (a, b)$ είναι διάστημα τότε φυσικά το μήκος του είναι ίσο με $b - a$. Εύκολα μπορεί κανείς να ορίσει το μήκος μιας πεπερασμένης ή ακόμη και αριθμήσιμης ένωσης διαστημάτων

$$m(\bigcup_n (a_n, b_n)) = \sum_n (b_n - a_n),$$

αν φυσικά τα διαστήματα είναι ανά δύο ξένα. Υπάρχουν όμως πολύ πιο περίπλοκα σύνολα από αυτά.

Ο γενικός ορισμός του μέτρου ενός συνόλου δίδεται έμμεσα. Παίρνουμε όλες τις καλύψεις του συνόλου E από αριθμήσιμες οικογένειες από ανοιχτά διαστήματα $I_n = (a_n, b_n)$

$$E \subseteq \bigcup_n I_n \tag{1.1}$$

και παίρνουμε ως μέτρο $m(E)$ του E το infimum των ποσοτήτων

$$\sum_n (b_n - a_n).$$

Προκύπτει εύκολα ότι με τον ορισμό αυτό δεν αλλάζει το μέτρο των διαστημάτων. Στην κάλυψη (1.1) δεν απαιτούμε να είναι ξένα μεταξύ τους τα διαστήματα I_n. Το γεγονός ότι παίρνουμε το infimum των καλύψεων κάπως «αναγκάζει» τα διαστήματα αυτά να μην έχουν επικαλύψεις.

Για λόγους που δε θέλουμε να περιγράψουμε σε αυτό το κείμενο προκύπτει ότι δε μπορεί κανείς να ορίσει το μέτρο σε όλα τα υποσύνολα του

$\mathbb{R}$ και ταυτόχρονα να περιμένει να είναι χρήσιμο. Για να αποκτήσει το μέτρο Lebesgue τις καλές του ιδιότητες (περιγράφονται παρακάτω) είναι απαραίτητο να περιορίσουμε τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τα οποία έχουν μέτρο. Την οικογένεια αυτή των συνόλων για των οποίων το μέτρο μπορούμε να μιλάμε την αποκαλούμε «τα μετρήσιμα σύνολα του $\mathbb{R}$» και δεν πρόκειται να την περιγράψουμε σε οποιαδήποτε λεπτομέρεια εκτός από το να πούμε ότι (α) όλα τα σύνολα τα οποία θα συναντήσουμε θα είναι μετρήσιμα και (β) ότι χρειάζεται αρκετή δουλειά (και το λεγόμενο «αξίωμα της επιλογής») για να δείξει κανείς ότι υπάρχουν μη μετρήσιμα σύνολα.

Από δω και πέρα θα μιλάμε μόνο για μετρήσιμα σύνολα χωρίς να το λέμε κάθε φορά.

Παραθέτουμε τώρα χωρίς απόδειξη τις κυριότερες ιδιότητες του μέτρου Lebesgue. Όπως μπορεί να δει ο προσεκτικός αναγνώστης οι ιδιότητες αυτές είναι πολύ διαισθητικές (με εξαίρεση ίσως τις 8 και 9) και ανταποκρίνονται σε αυτό που περιμένουμε να ισχύει για το «μήκος» ενός συνόλου. Παρ' όλ' αυτά κάποιες από τις αποδείξεις είναι αρκετά τεχνικές.

Θεώρημα 1.1
(Ιδιότητες του μέτρου Lebesgue)

1. $0 \le m(A) \le \infty$ *για καθε* $A \subseteq \mathbb{R}$.

2. *Όλα τα διαστήματα* (a, b) *(ανεξαρτήτως αν τα άκρα τους είναι μέσα) έχουν μέτρο* $b - a$.

3. *(Μονοτονία) Αν* $A \subseteq B$ *τότε* $m(A) \le m(B)$.

4. *(Προσθετικότητα) Αν* $E_1, E_2, \ldots \subseteq \mathbb{R}$ *είναι ανά δύο ξένα τότε*
$$m(\bigcup_n E_n) = \sum_n m(E_n).$$

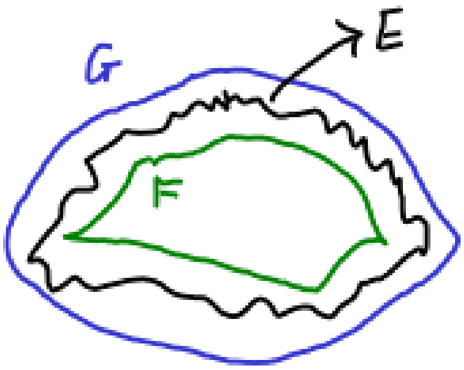
5. *(Υποπροσθετικότητα) Αν* $E_1, E_2, \ldots \subseteq \mathbb{R}$ *(δε ζητάμε να είναι ανά δύο ξένα) τότε*
$$m(\bigcup_n E_n) \le \sum_n m(E_n).$$

6. *(Αύξουσα ένωση συνόλων) Αν* $E_n \subseteq E_{n+1}$ *τότε*
$$m(\bigcup_n E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

7. *(Φθίνουσα τομή συνόλων) Αν* $E_n \supseteq E_{n+1}$ *και για κάποιο* n_0 *ισχύει* $m(E_{n_0}) < \infty$ *τότε*
$$m(\bigcap_n E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

8. *(Προσέγγιση από πάνω με ανοιχτά σύνολα) Αν* $E \subseteq \mathbb{R}$ *και* $\epsilon > 0$ *τότε υπάρχει ανοιχτό σύνολο* $G \supseteq E$ *τέτοιο ώστε*
$$m(G \setminus E) \le \epsilon.$$

9. *(Προσέγγιση από μέσα με κλειστά) Αν* $E \subseteq \mathbb{R}$ *και* $\epsilon > 0$ *τότε υπάρχει κλειστό σύνολο* $F \subseteq E$ *τέτοιο ώστε*
$$m(E \setminus F) \leq \epsilon.$$
(Δείτε και Σχήμα 1.1 για τα σύνολα $F \subseteq E \subseteq G$*.)*



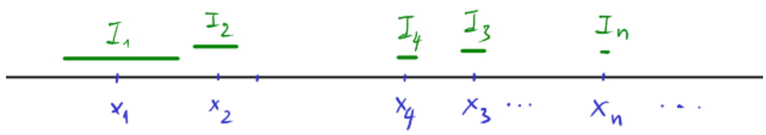
Σχήμα 1.1: Το μετρήσιμο σύνολο E περιέχει ένα κλειστό F και περιέχεται σε ένα ανοιχτό G τέτοια ώστε τα σύνολα $E \setminus F$ και $G \setminus E$ να έχουν οσοδήποτε μικρό μέτρο θέλουμε.

---

10. *(Αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές) Αν* $E \subseteq \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ *και*
$$E + t = \{x + t : \ x \in E\}$$
είναι η «μεταφορά του E *κατά* t*» τότε* $m(E+t) = m(E)$.

11. *(Ομοιοθεσία) Αν* $E \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *και*
$$\lambda E = \{\lambda x : \ x \in E\}$$
τότε $m(\lambda E) = |\lambda| m(E)$.

✏ **1.1.** *Αποδείξτε ότι κάθε αριθμήσιμο σύνολο* $E = \{x_1, x_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$ *έχει* $m(E) = 0$.
💡 *Έστω* $\epsilon > 0$ *και θεωρήστε την κάλυψη του* E *από τα ανοιχτά διαστήματα* $I_n = (x_n - \epsilon 2^{-n}, x_n + \epsilon 2^{-n})$. *Δείτε το Σχήμα 1.2.* ✏



Σχήμα 1.2: Κάλυψη ενός αριθμήσιμου συνόλου από ακολουθία διαστημάτων με μικρό συνολικά μήκος.

✏ **1.2.** *Δείξτε ότι το σύνολο των αρρήτων του* $[0, 1]$ *έχει μέτρο 1.*
💡 *Το σύνολο των ρητών είναι αριθμήσιμο. Με βάση την προσθετικότητα έχουμε*
$$m([0, 1]) = m([0, 1] \cap \mathbb{Q}) + m([0, 1] \cap \mathbb{Q}^c).$$

✎

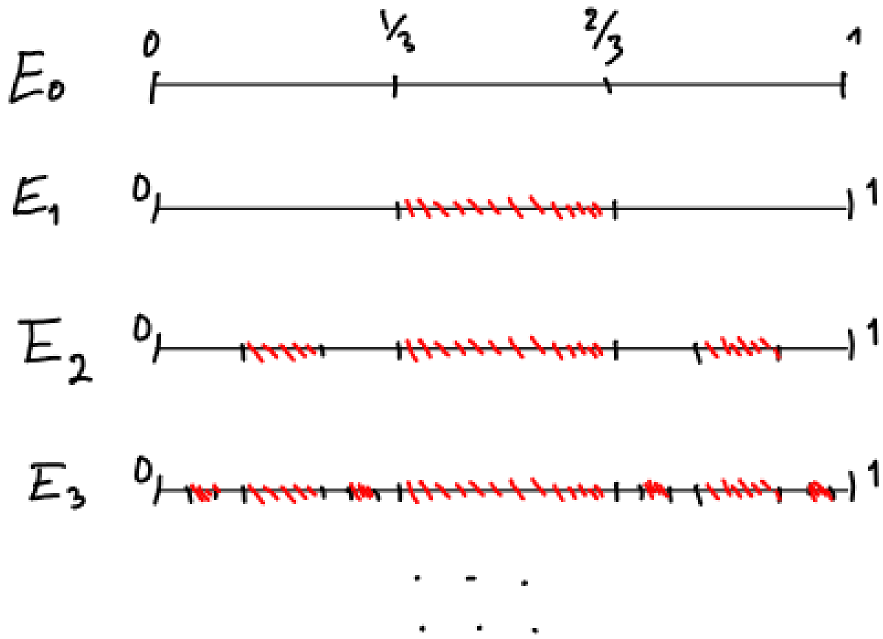
Σχεδόν παντού:
Λέμε ότι μια πρόταση που εξαρτάται από το $x \in \mathbb{R}$ ισχύει «σχεδόν για κάθε x» αν ισχύει για όλα τα x εκτός από ένα σύνολο εξαιρέσεων με μέτρο 0. Με άλλα λόγια υπάρχει ένα σύνολο E με $m(E) = 0$ τέτοιο ώστε η πρότασή μας ισχύει αν $x \notin E$. Αν το x εννοείται τότε λέμε «σχεδόν παντού».

Για παράδειγμα, «η συνάρτηση χ_Q[1] είναι σχεδόν παντού ίση με το 0» (αφού $m(\mathbb{Q}) = 0$).

✎ **1.3.** *Δείξτε ότι το τριαδικό σύνολο Cantor έχει μέτρο 0. Το σύνολο αυτό C κατασκευάζεται ως μια φθίνουσα τομή κλειστών υποσυνόλων του $[0,1]$*

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n.$$

Ισχύει κατ' αρχήν $E_0 = [0,1]$ και το κάθε E_n φτιάχνεται από το E_{n-1} ως εξής: το E_{n-1} είναι μια πεπερασμένη ένωση κλειστών διαστημάτων. Για να πάρουμε από το E_{n-1} το E_n απλά αφαιρούμε από το κάθε ένα από τα διαστήματά του το μεσαίο ένα τρίτο (χωρίς τα άκρα του) (Δείτε και το Σχήμα 1.3.) πετάμε από κάθε διάστημα του συνόλου μας το μεσαίο ένα



Σχήμα 1.3: Τα στάδια κατασκευής του τριαδικού συνόλου Cantor. Σε κάθε βήμα πετάμε από κάθε διάστημα του συνόλου μας το μεσαίο ένα τρίτο (κόκκινο χρώμα). Ό,τι μένει (μετά από άπειρα βήματα) είναι το σύνολο Cantor.

τρίτο (κόκκινο χρώμα). Για παράδειγμα $E_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$. Προκύπτει ότι το σύνολο C είναι μη κενό, συμπαγές και μάλιστα υπεραριθμήσιμο (δε μπορούμε δηλ. να γράψουμε όλα τα στοιχεία του ως μια ακολουθία).

[1]Η χαρακτηριστική συνάρτηση των ρητών, που είναι 1 για κάθε ρητό και 0 για κάθε άρρητο

Δείξτε ότι $m(C) = 0$.

Για κάθε n το σύνολο E_n είναι μια κάλυψη του C με διαστήματα. Ποιο το μέτρο του E_n; ✏

✏ **1.4.** *Αποδείξτε ότι στο Θεώρημα 1.1.7 δε μπορούμε να παραλείψουμε την υπόθεση ότι κάποιο από τα E_n έχει πεπερασμένο μέτρο.*

Πάρτε την περιπτωση $E_n = (n, +\infty)$. ✏

✏ **1.5.** *Λέμε ότι ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}$ είναι τύπου G_δ αν είναι αριθμήσιμη τομή ανοιχτών, αν υπάρχουν δηλ. ανοιχτά σύνολα $G_n \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $S = \bigcap_n G_n$. Αν $E \subseteq \mathbb{R}$ δείξτε ότι υπάρχει G_δ σύνολο $S \supseteq E$ τέτοιο ώστε $m(S \setminus E) = 0$.*

Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 1.1.8. ✏

✏**N 1.1.** *Αν S είναι ένα σύνολο τύπου G_δ (δείτε Άσκηση 1.5) δείξτε ότι γράφεται ως φθίνουσα τομή ανοιχτών συνόλων, ότι υπάρχουν δηλ. ανοιχτά σύνολα O_n, με $O_{n+1} \subseteq O_n$, τέτοια ώστε*

$$S = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n.$$

✏

1.2 Ολοκλήρωμα Lebesgue

Το μεγάλο μειονέκτημα του ολοκληρώματος Riemann είναι ότι είναι πολύ ευαίσθητο σε μικρές αλλαγές στη συνάρτηση. Πράγματι, το ολοκλήρωμα Riemann ορίζεται ως το όριο των λεγόμενων Riemann αθροισμάτων τα οποία χρησιμοποιούν τις τιμές της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης σε σημεία του διαστήματος. Μπορούμε εύκολα λοιπόν να «καταστρέψουμε» αυτά τα Riemann αθροίσματα πειράζοντας τη συνάρτηση στα κατάλληλα σημεία, πράγμα που σίγουρα δε θα έπρεπε να έχει επίπτωση στο εμβαδό του αθροίσματος κάτω από το γράφημα της συνάρτησης. Αυτός είναι και ο λόγος που συναρτήσεις που είναι πολύ εύκολο να οριστούν δεν έχουν ολοκλήρωμα Riemann. Το πιο απλό ίσως παράδειγμα είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση των ρητών (όπως και αυτή των αρρήτων) της οποίας όλα τα κάτω Riemann αθροίσματα είναι 0 και όλα τα άνω Riemann αθροίσματα είναι 1 (στο διάστημα $[0, 1]$ για παράδειγμα), και άρα δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Ιδού άλλη μία ένδειξη του πόσο πιο εύχρηστο είναι το ολοκλήρωμα Lebesgue σε σχέση με τις τιμές της συνάρτησης σε μεμονωμένα σημεία. Θα επιτρέπουμε από δω και πέρα στις συναρτήσεις να παίρνουν και τις τιμές $+\infty$ ή $-\infty$ και αυτό δε θα μας εμποδίσει, ως επί το πλείστον, να βρίσκουμε το ολοκλήρωμά τους. Ας είναι λοιπόν

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

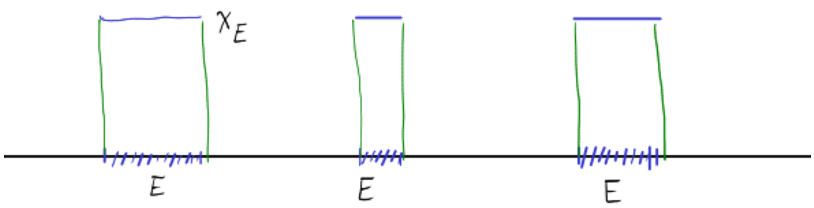
οι επεκτεταμένοι πραγματικοί αριθμοί και ας είναι $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ μια συνάρτηση.

Χρειάζεται κι εδώ η ίδια προειδοποίηση όπως και για τα μετρήσιμα σύνολα. Δεν είναι δυνατό να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue κάθε συνάρτησης, ούτε καν κάθε μη αρνητικής συνάρτησης. Οι συναρτήσεις των οποίων το ολοκλήρωμα ορίζουμε είναι οι λεγόμενες «μετρήσιμες» συναρτήσεις. Και εδώ θα επιλέξουμε να μην πούμε σχεδόν τίποτε άλλο γι' αυτές εκτός από το ότι (α) όσες συναρτήσεις θα συναντήσουμε θα είναι μετρήσιμες, (β) δεν είναι εύκολο να κατασκευαστεί μη μετρήσιμη συνάρτηση και (γ) αν δεν υπήρχαν μη μετρήσιμα σύνολα δε θα υπήρχαν ούτε μη μετρήσιμες συναρτήσεις. Όπως και με τα σύνολα έτσι και με τις συναρτήσεις, από δω και πέρα όλες οι συναρτήσεις για τις οποίες μιλάμε θα είναι μετρήσιμες είτε το λέμε αυτό είτε όχι.

1.2.1 Απλές και μη αρνητικές συναρτήσεις

Ας ξεκινήσουμε με μια πολύ απλή περίπτωση: $f(x) = \chi_E(x)$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου E (είναι 0 έξω από το E, 1 μέσα σε αυτό, δείτε το Σχήμα 1.4). Δεν έχουμε καμιά επιλογή για το πόσο πρέπει να είναι το ολοκλήρωμα της f, αν φυσικά θέλουμε να ορίσουμε μια ποσότητα που να μην αντιφάσκει με όσα ήδη ξέρουμε για το ολοκλήρωμα Riemann:

$$\int f = m(E).$$



Σχήμα 1.4: Η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου E και το ολοκληρωμά της (εμβαδό κάτω από το γράφημά της).

Αν επίσης θέλουμε το ολοκλήρωμα να είναι γραμμικό, να ισχύει δηλ.

$$\int(\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ f, g \text{ συναρτήσεις}$$

τότε ξέρουμε αμέσως πως να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue για πεπερασμένους γραμμικούς συνδυασμούς χαρακτηριστικών συναρτήσεων συνόλων:

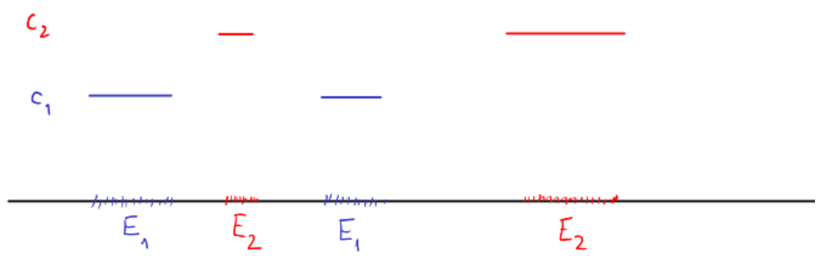
$$\int \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{E_j} = \sum_{j=1}^{N} c_j m(E_j), \tag{1.2}$$

όπου $c_j \in \overline{\mathbb{R}}$ και $E_j \subseteq \mathbb{R}$.

Ο ορισμός της (1.2) δεν είναι πλήρης αν δεν αποδείξει κανείς ότι η ποσότητα που ορίσαμε ως ολοκλήρωμα της f δεν αλλάζει αν γράψουμε την f με διαφορετικό τρόπο ως πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό χαρακτηριστικών συναρτήσεων. Η απόδειξη αυτή δεν είναι δύσκολη.

Πρέπει φυσικά να είμαστε λίγο προσεκτικοί με την προσθαφαίρεση αριθμών του $\overline{\mathbb{R}}$ και να θυμόμαστε ότι δεν προσθέτουμε ποτέ το $+\infty$ με το $-\infty$. Μια άλλη διαφορά με την ανάλυση όπως την ξέραμε ως τώρα είναι ότι στον παραπάνω τύπο ένα γινόμενο του τύπου $0 \cdot \infty$ είναι πάντα ίσο με 0. Ο λόγος γι' αυτό είναι, λίγο-πολύ, ότι θέλουμε ένα ορθογώνιο (στο επίπεδο) που έχει άπειρο μήκος και μηδενικό ύψος να έχει τελικά εμβαδό ίσο με 0.

✏ **1.6.** *Μια συνάρτηση που είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων ονομάζεται «απλή» συνάρτηση (Σχήμα 1.5). Δείξτε ότι μια συνάρτηση είναι απλή αν και μόνο αν το σύνολο των τιμών που παίρνει είναι πεπερασμένο.*



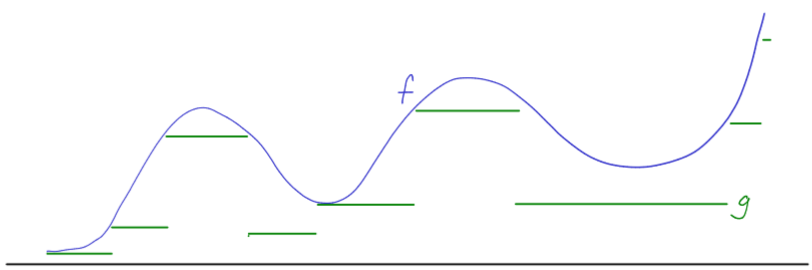
Σχήμα 1.5: Η απλή συνάρτηση $c_1\chi_{E_1} + c_2\chi_{E_2}$

💡 *Το ότι η συνάρτηση, ας την πούμε f, είναι απλή σημαίνει ότι το σύνολο των τιμών της, V, είναι ένα πεπερασμένο σύνολο $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Χρησιμοποιήστε τα σύνολα $E_j = \{x : f(x) = v_j\}$ όπου $j = 1, 2, \ldots, k$.* ✏

✏ **1.7.** *Δείξτε ότι $\int \chi_{\mathbb{Q}} = 0$.*

💡 *Η $\chi_{\mathbb{Q}}$ είναι απλή συνάρτηση.* ✏

Ο ορισμός του ολοκληρώματος Lebesgue για μια οποιαδήποτε <u>μη αρνητική</u> συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ γίνεται χρησιμοποιώντας όλες τις μη αρνητικές απλές συναρτήσεις που είναι κάτω από την f (Σχήμα 1.6):



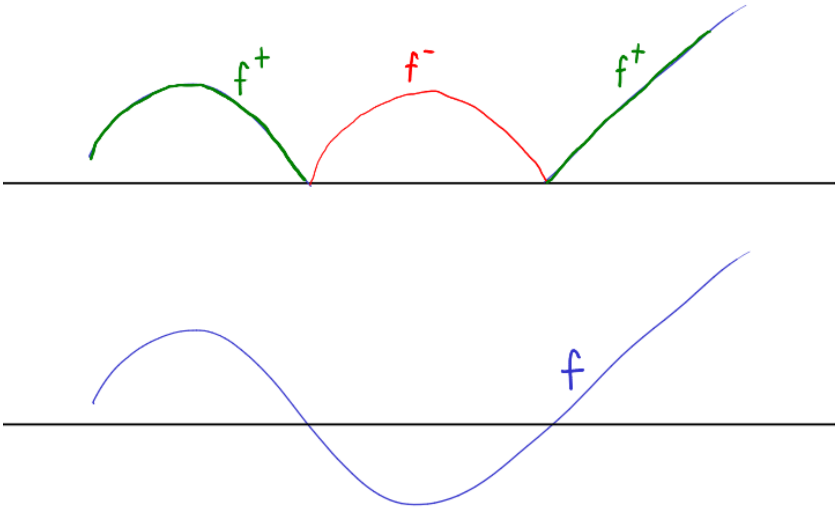
Σχήμα 1.6: Μια μη αρνητική συνάρτηση f και μια απλή συνάρτηση g με $g \leq f$ παντού

$$\int f = \sup\left\{\int g : \ 0 \le g \le f \text{ και } g \text{ απλή}\right\}. \tag{1.3}$$

Το ολοκλήρωμα λοιπόν μιας $f \ge 0$ πάντα υπάρχει αλλά μπορεί να είναι και $+\infty$. Αυτό είναι ήδη μια τεράστια ανακούφιση σε σχέση με το ολοκλήρωμα Riemann. (Πάντα με την υποθάλπουσα παραδοχή ότι μας απασχολούν μόνο οι *μετρήσιμες* συναρτήσεις.)

✏ **1.8.** *Αν* $0 \le f \le g$ *δείξτε ότι* $0 \le \int f \le \int g$ ✏

Τέλος, αν $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση μπορούμε να γράψουμε την f ως διαφορά δύο μη αρνητικών συναρτήσεων (Σχήμα 1.7)



Σχήμα 1.7: Μια προσημασμένη συνάρτηση f μαζί με το θετικό και αρνητικό μέρος της f^+ και f^-

---

$$f = f^+ - f^-$$

όπου $f^+ = \max\{0, f\}$ και $f^- = -\min\{0, f\}$. (Παρατηρήστε ότι ισχύει $|f| = f^+ + f^-$.) Η γραμμικότητα μας επιβάλλει να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας τέτοιας f ως

$$\int f = \int f^+ - \int f^-,$$

και πάλι βέβαια με την προϋπόθεση ότι δεν έχουμε την απροσδιόριστη μορφή $\infty - \infty$ (σε αυτή και μόνο την περίπτωση δεν ορίζεται το ολοκλήρωμα).

Αν τώρα η f είναι μιγαδική συνάρτηση, $f = u + iv$, όπου u, v είναι πραγματικές συναρτήσεις, ορίζουμε το ολοκλήρωμα της f (και πάλι λόγω της επιθυμητής γραμμικότητας) να είναι

$$\int f = \int u + i \int v.$$

Μέχρι τώρα έχουμε ορίσει μόνο το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης πάνω σε όλη την πραγματική ευθεία. Πώς μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης πάνω σε ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$; Πολύ απλά

$$\int_A f = \int \chi_A \cdot f$$

με την προϋπόθεση φυσικά ότι το δεξί μέλος ορίζεται.

Αξίζει εδώ να αναφέρουμε ότι η κατάσταση με το ολοκλήρωμα Riemann είναι πολύ διαφορετική: αποδεικνύεται ότι μια συνάρτηση είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν το σύνολο των σημείων όπου είναι ασυνεχής έχει μέτρο 0.

1.9. *Αν $f \ge 0$ στο A και $\int_A f = 0$ δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού στο A.*

Αν $n = 1, 2, \ldots$ μπορεί το μέτρο του συνόλου όπου $f > 1/n$ να είναι θετικό; Παρατηρήστε ότι

$$\{f > 0\} = \bigcup_n \{f > 1/n\}$$

και χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 1.1.6 και το Πρόβλημα 1.8.

1.10. *Αν $A \subseteq B$ και $f : B \to [0, +\infty]$ τότε $\int_A f \le \int_B f$.*

1.2.2 Ολοκληρωσιμότητα. Ο χώρος $L^1(A)$.

Μια συνάρτηση λέγεται «ολοκληρώσιμη» στο $A \subseteq \mathbb{R}$ αν $\int_A |f| < \infty$, πράγμα που είναι ισοδύναμο με το να ισχύει

$$\int_A f^+ < \infty, \quad \int_A f^- < \infty.$$

Για μιγαδικές συναρτήσεις έχουμε τον ίδιο ορισμό ολοκληρωσιμότητας (να είναι δηλ. $\int_A |f| < \infty$).

Γράφουμε $L^1(A)$ για το χώρο όλων των συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{C}$ που είναι ολοκληρώσιμες στο A.

1.11. *Αποδείξτε ότι κάθε φραγμένη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $m(A) < \infty$.*

1.12. *Αν $f : A \to [0, +\infty]$ είναι ολοκληρώσιμη τότε η f είναι πεπερασμένη σχεδόν παντού στο A. Με άλλα λόγια $m\{x \in A : f(x) = +\infty\} = 0$.*

Συγκρίνετε την f με την απλή συνάρτηση g που είναι 0 εκεί όπου η f είναι πεπερασμένη και ∞ όπου και η f. Ποιο το $\int g$ και ποια η σχέση του με το $\int f$;

1.13. *(Ανισότητα Markov)*
Αν $0 \le f \in L^1(A)$ και $\lambda > 0$ τότε $m\{x \in A : f(x) \ge \lambda\} \le \int_A f/\lambda$.

Πόσο καλύτερη μπορεί να γίνει η ανισότητα αυτή αν γνωρίζετε όχι απλά ότι $\int f < \infty$ αλλά ότι $\int e^f < \infty$;

Μπορείτε να βάλετε πιο γενικές συναρτήσεις της f στη θέση της εκθετικής εδώ;

Αν $E = \{x \in A : f(x) \ge \lambda\}$ τότε $\int_A f \ge \int_E f \ge \int_E \lambda$.

1.2.3 Υπολογισμοί και θεωρήματα σύγκλισης

Αποδεικνύεται εύκολα ότι αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση (σε φραγμένο διάστημα) τότε το ολοκλήρωμα Riemann της f είναι ίδιο με το ολοκλήρωμα Lebesgue. Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιούμε όλες τις τεχνικές υπολογισμού που έχουμε μάθει για το ολοκλήρωμα Riemann για να υπολογίζουμε ολοκληρώματα Lebesgue συνεχών συναρτήσεων. Επίσης συχνά χρησιμοποιούμε το, συνηθισμένο από το ολοκλήρωμα Riemann, συμβολισμό $\int_a^b f(x)\,dx$ ή $\int_a^b f$ αντί για τον $\int_{[a,b]} f$.

Επίσης ισχύει ο γνωστός μας τύπος για την αλλαγή μεταβλητής. Αν $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και αύξουσα τότε

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int_c^d f(y)\,dy \tag{1.4}$$

όπου $c = \phi(a)$, $d = \phi(b)$.

Το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι πολύ εύχρηστο στη Μαθηματική Ανάλυση κυρίως λόγω των θεωρημάτων σύγκλισης, τα οποία μας λένε ουσιαστικά πότε μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά δύο οριακών διαδικασιών.

Θεώρημα 1.2
(Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης) Αν $f_n : A \to [0,+\infty]$ είναι μια ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων που είναι μονότονη (ως προς n)

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x), \quad (x \in A),$$

και $f(x) = \lim_n f_n(x)$ τότε

$$\lim_n \int_A f_n = \int_A f.$$

✏ **1.14.** *Αν $f : [0,1] \to [0,+\infty]$ δείξτε ότι*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^1 f(x)\,dx.$$

💡 *Γράψτε*

$$f_n = \chi_{[\frac{1}{n},1]} f$$

και χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 1.2.

Χρησιμοποιήστε το αυτό για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $\int_0^1 x^\alpha\,dx$ για όλες τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$. Για ποιες τιμές του α είναι η x^α στο $L^1([0,1])$; Με παρόμοιο τρόπο εργαζόμενοι αλλά στο διάστημα $[1,\infty)$ βρείτε για ποιες τιμές είναι η συνάρτηση x^α στο $L^1([1,\infty])$; ✏

✏ **1.15.** *Αν $f_n : A \to [0,+\infty]$ και $f = \sum_n f_n$ (παρατηρήστε ότι το όριο των μερικών αθροισμάτων της σειράς πάντα υπάρχει στο $[0,+\infty]$) τότε αν*

$$\sum_n \int_A f_n < \infty$$

έπεται ότι η f είναι σχεδόν παντού πεπερασμένη.

Ποιο το ολοκλήρωμα της f; Χρησιμοποιήστε και το Πρόβλημα 1.12.

1.16. *Ας είναι $x_n \in [0, 1/2]$ και $0 \le \ell_n \le 1/2$ τέτοια ώστε $\sum_n \ell_n < \infty$. Δείξτε ότι η σειρά*

$$\sum_n \chi_{[x_n, x_n+\ell_n]}(x)$$

συγκλίνει (σε πεπερασμένο αριθμό) σχεδόν για όλα τα $x \in [0, 1]$.

Τι συμπεραίνετε για την ποσότητα $N(x)$ = σε πόσα από τα διαστήματα $[x_n, x_n + \ell_n]$ ανήκει ο αριθμός $x \in [0, 1]$;

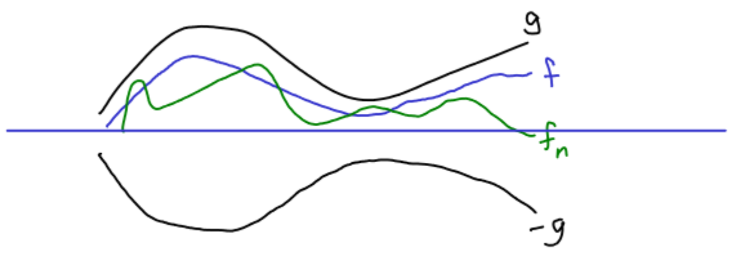
Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 1.15.

Το σημαντικότερο ίσως οριακό θεώρημα για το μέτρο Lebesgue είναι το επόμενο. Λέμε ότι οι f_n «κυριαρχούνται» από την g.

Θεώρημα 1.3
(Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης) Έστω $f_n, g \in L^1(A)$ τέτοιες ώστε $|f_n(x)| \le |g(x)|$ σχεδόν παντού στο A. Έστω επίσης ότι υπάρχει το όριο $f(x) = \lim_n f_n(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in A$. Τότε

$$\lim_n \int_A f_n = \int_A f.$$

(Δείτε και το Σχήμα 1.8.)



Σχήμα 1.8: Η συνάρτηση $|g|$ είναι μεγαλύτερη και από την f και από τις f_n

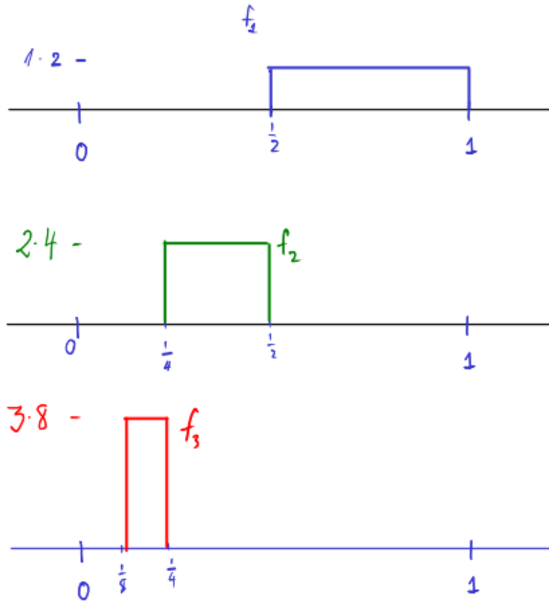
---

1.17. *Υπό τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 1.3 δείξτε ότι ισχύει και $\int_A |f_n - f| \to 0$.*

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $|f_n - f| \le 2|g|$.

1.18. *Κατασκευάστε μια ακολουθία $f_n : [0, 1] \to [0, +\infty)$ τέτοια ώστε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ αλλά με $\int_0^1 f_n \to +\infty$.*

Δε θα πρέπει φυσικά να ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1.3 για να τα καταφέρετε. Είναι καλή ιδέα να μη ψάχνετε για μια φόρμουλα για την ακολουθία $f_n(x)$ αλλά να προσπαθήσετε να σχεδιάσετε το πώς μοιάζουν τα γραφήματά τους και να θυμάστε ότι το ολοκλήρωμα είναι το εμβαδό κάτω από το γράφημα. Μια ιδέα είναι να προχωρήσετε όπως στο Σχήμα 1.9.



Σχήμα 1.9: Ακολουθία συναρτήσεων f_n που τείνει στο 0 κατά σημείο αλλά που τα ολοκληρώματά της τείνουν στο ∞

1.19. *(Συνέχεια του αορίστου ολοκληρώματος) Αν $f \in L^1([a,b])$ και $x_0 \in (a,b)$ τότε η συνάρτηση*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (x \in [a,b])$$

(που ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα της f) είναι συνεχής στο x_0.

Αν $h_n \to 0$ δείξτε ότι η ποσότητα $F(x_0+h_n) - F(x_0)$ τείνει στο 0 χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.3 για τις συναρτήσεις $f_n = f \cdot \chi_{[a, x_0+h_n]}$ οι οποίες κυριαρχούνται από την f.

1.20. *Αν $f \in L^1(A)$ και ορίσουμε*

$$g_n(x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{αν } |f(x)| \geq n \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

δείξτε ότι $\int_A g_n \to 0$.

1.21. *Αν $f \in L^1(A)$ και $A_n \subseteq A$ είναι τέτοια ώστε $m(A_n) \to 0$ δείξτε ότι $\int_{A_n} f \to 0$.*

Γράψτε την f σαν άθροισμα των συναρτήσεων

$$f_1 = f \cdot \chi_{\{|f|>M\}} \text{ και } f_2 = f \cdot \chi_{\{|f| \leq M\}},$$

όπου $M > 0$ είναι μια παράμετρος που επιλέγεται αρκετά μεγάλη. Δείξτε πρώτα το ζητούμενο για τη φραγμένη συνάρτηση f_2 και χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 1.20 για την f_1.

1.2.4 Μέτρο και ολοκλήρωμα στο $\mathbb{R}^d$. Θεώρημα του Fubini

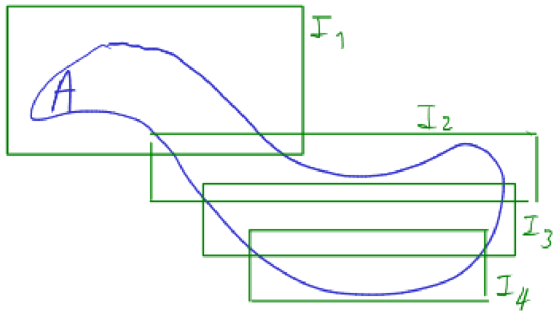
Όπως ορίζει κανείς το μέτρο ενός συνόλου στο $\mathbb{R}$ έτσι ορίζει και το μέτρο ενός συνόλου στο $\mathbb{R}^d$ για $d > 1$. Υπάρχουν κάποιες λίγες διαφορές και επιπλέον τεχνικές δυσκολίες αλλά η ουσία είναι η ίδια. Η στρατηγική που ακολουθείται για να οριστεί το μέτρο στο $\mathbb{R}^d$ είναι και πάλι ότι πρώτα ορίζει κανείς το μέτρο ενός διαστήματος (διάστημα στο $\mathbb{R}^d$ είναι η ορολογία που χρησιμοποιείται για να περιγράψουμε ένα ορθογώνιο με πλευρές παράλληλους με τους άξονες)

$$I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_d, b_d)$$

να είναι ο «όγκος» του

$$m(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_d - a_d).$$

Έχοντας ορίσει το μέτρο ενός διαστήματος μπορούμε μετά να ορίσουμε το μέτρο ενός γενικού συνόλου παίρνοντας το infimum για όλες τις καλύψεις του συνόλου από αριθμήσιμες οικογένειες διαστημάτων



Σχήμα 1.10: Κάλυψη συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^d$ από τέσσερα διαστήματα $I_1, \ldots, I_4$.

$$A \subseteq \bigcup_n I_n,$$

και ορίζοντας

$$m(A) = \inf \sum_n m(I_n)$$

παίρνοντας το infimum για όλες αυτές τις καλύψεις (Σχήμα 1.10). (Ισχύει κι εδώ η παρατήρηση που κάναμε στη μια διάσταση, ότι δηλ. δε μπορεί να οριστεί το μέτρο για όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, αλλά για μια ευρύτατη κατηγορία συνόλων, που τα ονομάζουμε «μετρήσιμα» σύνολα. Όλα τα σύνολα που θα συναντάμε από δω και πέρα θα είναι μετρήσιμα.)

Για το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}^d$ ισχύουν και πάλι όλες οι ιδιότητες του Θεωρήματος 1.1 με μόνη διαφορά στο 1.1.11 που ισχύει ως εξής:

$$m(\lambda E) = |\lambda|^d m(E).$$

Το ολοκλήρωμα Lebesgue συναρτήσεων στο $\mathbb{R}^d$ ορίζεται με την ίδια διαδικασία. Πρώτα ορίζουμε το ολοκλήρωμα κάθε απλής συνάρτησης

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}, \tag{1.5}$$

όπου E_j είναι σύνολα και $c_j \in \mathbb{C}$ είναι μιγαδικοί αριθμοί. Το ολοκλήρωμα μιας τέτοιας f ορίζεται και πάλι να είναι[2]

$$\int f = \sum_{j=1}^{n} c_j m(E_j).$$

Έπειτα ορίζει κανείς το ολοκλήρωμα μη αρνητικών συναρτήσεων προσεγγίζοντας τις από κάτω από απλές συναρτήσεις όπως ακριβώς στη μια διάσταση και τέλος ορίζει το ολοκλήρωμα προσημασμένων συναρτήσεων γράφοντάς τις ως διαφορά δύο μη αρνητικών συναρτήσεων. Η ολοκληρωσιμότητα και οι χώροι $L^1(A)$ ορίζονται ακριβώς το ίδιο και το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης 1.2 όπως και το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης 1.3 ισχύουν και σε αυτή την περίπτωση.

Το θεώρημα του Fubini 1.4 μας επιτρέπει να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα (ένα διπλό ολοκλήρωμα όπως λέμε) στο $\mathbb{R}^2$ (ή σε μεγαλύτερη διάσταση αλλά ας περιοριστούμε προς το παρόν στο $\mathbb{R}^2$) ως ένα επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα.

Θεώρημα 1.4
(Fubini) Αν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ και ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f| < \infty \tag{1.6}$$

τότε ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \iint f(x,y)\,dx\,dy = \iint f(x,y)\,dy\,dx. \tag{1.7}$$

Αν η f είναι μη αρνητική τότε η (1.7) ισχύει χωρίς καμία προϋπόθεση (αλλά μπορούν φυσικά και τα δύο μέλη της να είναι $+\infty$). Συνέπεια της τελευταίας πρότασης είναι ότι αν ισχύει

$$\iint |f(x,y)|\,dx\,dy < \infty \quad \text{ή} \quad \iint |f(x,y)|\,dy\,dx < \infty \tag{1.8}$$

τότε ισχύει και η υπόθεση (1.6).

Τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στο (1.7) και στο (1.8) είναι επαναλαμβανόμενα μονοδιάστατα ολοκληρώματα, είναι δηλ.

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \int \left(\int f(x,y)\,dx \right)\,dy.$$

Πρώτα δηλ. ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση $f(x,y)$ ως προς x, και άρα το αποτέλεσμα είναι μια συνάρτηση του y, και έπειτα ολοκληρώνουμε ως προς y τη συνάρτηση αυτή του y που προέκυψε με την πρώτη ολοκλήρωση.

✏ **1.22.** *Αν $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ τότε η συνέλιξή τους ορίζεται ως η συνάρτηση*

$$f * g(x) = \int f(y) g(x-y)\,dy, \quad (x \in \mathbb{R}^d). \tag{1.9}$$

[2] όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση πρέπει να αποδείξει κι εδώ κανείς ότι αν μια απλή συνάρτηση γραφτεί με διαφορετικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων τότε το αποτέλεσμα του τύπου (1.5) δεν αλλάζει.

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f*g$ είναι καλώς ορισμένη σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$, ότι δηλ. σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ η συνάρτηση του y που ολοκληρώνουμε, η $f(y)g(x-y)$, είναι ολοκληρώσιμη, ισχύει δηλ. $\int |f(y)g(x-y)|\,dy < \infty$. Για τα υπόλοιπα x ορίζουμε $f*g(x) = 0$.

Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Fubini 1.4 για μη αρνητικές συναρτήσεις και δείξτε ότι

$$\int\int |f(y)g(x-y)|\,dy\,dx < \infty.$$

Έπειτα χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 1.12 για να δείξετε το ζητούμενο.

1.23. *Αν $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ δείξτε ότι $f*g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ και μάλιστα*

$$\int |f*g| \le \int |f| \cdot \int |g|. \tag{1.10}$$

1.24. *Αν $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ και $|g| \le M$ τότε η $f*g$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ από την (1.9), είναι φραγμένη και μάλιστα $|f*g| \le M \int |f|$ παντού στο $\mathbb{R}^d$.*

1.25. *Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $f*g$ και $g*f$ είναι σχεδόν παντού ίσες αν $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.*

Χρησιμοποιήστε τον τύπο (1.4) για μια κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής και το Θεώρημα 1.4.

1.3 Οι χώροι $L^p(A)$

Μέχρι στιγμής έχουμε δει τον χώρο $L^1(A)$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^d$ έχει $m(A) > 0$, που απαρτίζεται από όλες τις συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{C}$ που είναι ολοκληρώσιμες, ισχύει δηλ. για αυτές $\int_A |f| < \infty$. Αν τώρα $p \in [1, \infty)$ ορίζουμε το χώρο $L^p(A)$ να απαρτίζεται από όλες τις συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{C}$ για τις οποίες $\int_A |f|^p < \infty$. Η L^p *νόρμα* της $f \in L^p(A)$ είναι η ποσότητα

$$\|f\|_p = \left(\int_A |f|^p\right)^{1/p},$$

για την οποία εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει

$$\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p, \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τη ποσότητα

$$d(f, g) = \|f - g\|_p$$

για να ορίσουμε μια έννοια απόστασης (*μετρική*) ανάμεσα στις συναρτήσεις του $L^p(A)$.

Απαραίτητο λοιπόν είναι να ισχύει η «τριγωνική ανισότητα»

$$d(f, g) \le d(f, h) + d(h, g), \quad \text{για κάθε } f, g, h \in L^p(A).$$

Αυτό είναι το περιεχόμενο του επόμενου θεωρήματος το οποίο επίσης μας λέει ότι ο χώρος $L^p(A)$ είναι γραμμικός χώρος και άρα έχει νόημα να μιλάμε για την L^p νόρμα του αθροίσματος ή διαφοράς δύο L^p συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.5
(Ανισότητα Minkowski) Αν $1 \le p < \infty$ και $f, g \in L^p(A)$ τότε ισχύει $f + g \in L^p(A)$ και

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Ο κύριος λόγος για τον οποίο δεν εξετάζουμε (συνήθως) τις τιμές $p < 1$ είναι ότι για αυτές δεν ισχύει η ανισότητα του Minkowski.

Τέλος, για να μπορεί να παίξει η ποσότητα $\|f-g\|_p$ το ρόλο της απόστασης ανάμεσα στις $f, g \in L^p(A)$ πρέπει οπωσδήποτε να ισχύει και η συνεπαγωγή

$$\|f-g\|_p = 0 \Rightarrow f = g.$$

Όμως αυτό δε μπορεί να ισχύσει μια και μπορούμε να παραλλάξουμε μια τυχούσα συνάρτηση $f \in L^p(A)$ σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν, π.χ. μπορούμε να αλλάξουμε τη συνάρτηση σε ένα σημείο, χωρίς να αλλάξουμε καθόλου όλες τις ολοκληρωτικές ποσότητες που εξαρτώνται από την f. Πιο συγκεκριμένα, αν $\widetilde{f}$ είναι ίδια με την f εκτός από ένα σημείο τότε οι δύο συναρτήσεις δεν είναι ίδιες, αφού οι τιμές τους διαφέρουν σε κάποια x, αλλά $\int_A |f-g|^p = 0$.

Η μόνη μας διέξοδος εδώ είναι να αγνοήσουμε τις επουσιώδεις διαφορές ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις, θεωρούμε δηλ. δύο συναρτήσεις f και g ίδιες αν διαφέρουν οι τιμές τους μόνο σε ένα σύνολο από x που έχουν μέτρο 0. Λέμε τότε ότι οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες «σχεδόν παντού» (συντομογραφία: σ.π. ή a.e. στα Αγγλικά για το almost everywhere).

Αν θα θέλαμε να είμαστε λίγο πιο αυστηροί θα ορίζαμε μια σχέση ισοδυναμίας ανάμεσα σε συναρτήσεις, όπου δύο συναρτήσεις θεωρούνται ισοδύναμες αν υπάρχει σύνολο E, με $m(E) = 0$, τ.ώ. για $x \notin E$ έχουμε $f(x) = g(x)$. Τα στοιχεία του χώρου $L^p(A)$ είναι κλάσεις ισοδυναμίας αυτής της σχέσης ισοδυναμίας που μόλις ορίσαμε.

✏ **1.26.** *Αποδείξτε ότι η σχέση που μόλις ορίσαμε είναι όντως μια σχέση ισοδυναμίας ανάμεσα σε συναρτήσεις.* ✏

✏ **1.27.** *Αποδείξτε ότι αυτή μας η σύμβαση είναι αρκετή: αν f και g διαφέρουν στις τιμές τους για $x \in E$, με $m(E) > 0$, τότε $\|f-g\|_p > 0$, για κάθε $p \in [1, \infty)$.*

Εξετάστε τα σύνολα $E_n = \{x : |f(x) - g(x)| > 1/n\}$ και δείξτε ότι κάποιο από αυτά πρέπει να έχει θετικό μέτρο. ✏

Πρέπει εδώ να αναφέρουμε ότι το Θεώρημα 1.5 είναι συνέπεια της πολύ σημαντικής ανισότητας του Hölder.

Θεώρημα 1.6
(Ανισότητα Hölder) Αν $1 < p, q < \infty$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (τέτοιοι αριθμοί p και q ονομάζονται «συζυγείς εκθέτες») τότε, αν $f \in L^p(A)$ και $f \in L^q(A)$, η συνάρτηση $f\overline{g} \in L^1(A)$ και ισχύει

$$\left|\int_A f\overline{g}\right| \le \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.11}$$

Ειδική περίπτωση ($p = q = 2$) της ανισότητας Hölder είναι η πάρα πολύ σημαντική ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Θεώρημα 1.7
(Ανισότητα Cauchy-Schwarz) Αν $f, g \in L^2(A)$ τότε $f\overline{g} \in L^1(A)$ και

$$\left|\int_A f\overline{g}\right| \le \|f\|_2\|g\|_2.$$

Για να ορίσουμε και τον χώρο $L^\infty(A)$ χρειαζόμαστε την έννοια του ουσιώδους supremum μιας συνάρτησης, το οποίο είναι, κατά κάποιο τρόπο, το supremum της συνάρτησης που όμως δεν επηρεάζεται από επουσιώδεις αλλαγές στη συνάρτηση. Για να ορίσουμε λοιπόν το $\text{ess sup} f$, όπου f μια συνάρτηση ορισμένη στο A, ορίζουμε κατ' αρχήν το σύνολο

$$U_f = \{M \in \mathbb{R} : m\{x \in A : \ f(x) > M\} = 0\}.$$

Αυτό είναι το σύνολο όλων του ουσιωδών άνω φραγμάτων της f, των αριθμών δηλ. M που η f τους ξεπερνά μόνο σε ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της που έχει μέτρο 0. Τέλος ορίζουμε

$$\text{ess sup} f = \inf U_f$$

να είναι το «ελάχιστο» τέτοιο άνω φράγμα.

Ο χώρος $L^\infty(A)$ (με $m(A) > 0$) είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{C}$ για τις οποίες $\text{ess sup} |f| < \infty$. Ορίζουμε τέλος την sup-νόρμα ή άπειρο-νόρμα της f

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup} |f|.$$

Όπως και στους άλλους χωρους $L^p(A)$ κι εδώ δεν ξεχωρίζουμε μεταξύ τους δύο συναρτήσεις που διαφέρουν μόνο σε ένα σύνολο σημείων του A που έχει μέτρο 0.

✏ **1.28.** *Αν $f, g : A \to \mathbb{C}$ διαφέρουν μόνο σε ένα σύνολο $E \subseteq A$ με $m(E) = 0$ δείξτε ότι $\text{ess sup} f = \text{ess sup} g$, και συνεπώς η άπειρο-νόρμα των συναρτήσεων στο $L^\infty(A)$ είναι καλώς ορισμένη ακόμη κι αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση μόνο σχεδόν παντού.* ✏

✏ **1.29.** *Αν τα $p = 1$ και $q = \infty$ θεωρηθούν συζυγείς εκθέτες δείξτε ότι η ανισότητα Hölder ισχύει όπως είναι γραμμένη στο Θεώρημα 1.6.*

Δείξτε επίσης ότι η τριγωνική ανισότητα (Θεώρημα 1.5) ισχύει και για $p = \infty$. ✏

✏ **1.30.** *Αν $0 < m(A) < \infty$ και $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$ δείξτε ότι $L^{p_2}(A) \subseteq L^{p_1}(A)$. Δείξτε επίσης ότι $\|f\|_{p_1} \le \|f\|_{p_2}$ αν επιπλέον $m(A) = 1$.*

💡 $\int_A |f|^{p_1} = \int_A |f|^{p_1} \cdot 1$. *Εφαρμόστε την ανισότητα Hölder με εκθέτες p_2/p_1 και το συζυγή του.* ✏

✏ **1.31.** *Αν $f \in L^p(A)$, με $1 \le p < \infty$, δείξτε ότι για $\lambda > 0$ ισχύει*

$$m\{x \in A : |f(x)| \ge \lambda\} \le \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}.$$

💡 $\int_A |f|^p \ge \int_{\{|f|\ge\lambda\}} |f|^p \ge \int_{\{|f|\ge\lambda\}} \lambda^p.$ ✏

Γιατί έχουμε επιλέξει αυτή την ονομασία για το χώρο L^∞, ένα όνομα του ίδιου τύπου με τους χώρους L^p, με $p < \infty$, που όμως είναι χώροι που ορίζονται εντελώς διαφορετικά, με ένα ολοκλήρωμα δηλαδή; Οι χώροι L^p είναι όντως σε πολλά πράγματα αρκετά διαφορετικοί από τον L^∞ και ακόμη κι όταν συμπεριφέρονται παρόμοια η απόδειξη γι' αυτό είναι διαφορετική στην περίπτωση του πεπερασμένου p απ' ό,τι στην περίπτωση του L^∞. Αυτό είναι φυσιολογικό μια και ορίζονται πολύ διαφορετικά. Η απάντηση στο ερώτημα της ονομασίας έγκειται στο Πρόβλημα 1.30 και στο Πρόβλημα 1.32 που ακολουθεί.

✏ **1.32.** *Αν $m(A) = 1$ και $f \in L^\infty(A)$ δείξτε ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.*

💡 *Έστω $\epsilon > 0$ και*

$$E = \{x \in A : |f(x)| \ge (1-\epsilon)\|f\|_\infty\}.$$

Τότε $m(E) > 0$ (αλλιώς το $\operatorname{ess\,sup}|f|$ θα ήταν μικρότερο) και $\|f\|_p \ge (\int_E |f|^p)^{1/p}$. ✏

Από την ανισότητα Minkowski προκύπτει ότι οι χώροι $L^p(A)$ είναι διανυσματικοί χώροι και οι αντίστοιχες νόρμες τούς καθιστούν παράλληλα και μετρικούς χώρους. Είναι πολύ σημαντικό ότι αυτοί είναι πλήρεις χώροι (χώροι Banach). Ό,τι και να είναι το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^d$ (με θετικό μέτρο) αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο A που έχει συμπαγή φορέα (υπάρχει δηλ. πεπερασμένος αριθμός $R > 0$ τέτοιος ώστε η f μηδενίζεται εκτός του διαστήματος $(-R, R)^d$) τότε $f \in L^p(A)$ για κάθε $p \in [1, +\infty]$. Το ακόλουθο θεώρημα πυκνότητας είναι πάρα πολύ σημαντικό για τις εφαρμογές.

Θεώρημα 1.8
(Πυκνότητα των συνεχών συναρτήσεων) Αν $A \subseteq \mathbb{R}^d$ με $0 < m(A)$ τότε οι χώροι $L^p(A)$ είναι πλήρεις μετρικοί χώροι για $1 \le p \le \infty$.

Για $1 \le p < \infty$ ο γραμμικός υπόχωρος των συνεχών συναρτήσεων με φραγμένο φορέα είναι πυκνός στο χώρο $L^p(A)$. Δηλαδή, για κάθε $f \in L^p(A)$ και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συνεχής $g : A \to \mathbb{C}$ με φραγμένο φορέα τ.ώ.

$$\|f - g\|_p \le \epsilon.$$

✏ **1.33.** *Αποδείξτε ότι ο γραμμικός χώρος των κατά τμήματα σταθερών συναρτήσεων (συναρτήσεων που είναι δηλ. πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί χαρακτηριστικών συναρτήσεων φραγμένων διαστημάτων) είναι πυκνός στον χώρο $L^p(\mathbb{R})$ για $1 \le p < \infty$.*

💡 *Χρησιμοποιήστε την πυκνότητα των συνεχών συναρτήσεων με φραγμένο φορέα (Θεώρημα 1.8) καθώς και το ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε φραγμένο κλειστό διάστημα είναι και ομοιόμορφα συνεχής.* ✏

✏ **1.34.** *Δείξτε ότι αν $1 \le p < \infty$ και $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ τότε*

$$\|f(\cdot) - f(\cdot - h)\|_p \to 0 \text{ για } h \to 0.$$

💡 *Δείξτε το πρώτα αν f είναι συνεχής συνάρτηση με φραγμένο φορέα και έπειτα χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 1.8.* ✏

✏ **1.35.** *(Λήμμα Riemann–Lebesgue) Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ ορίζουμε τη συνάρτηση (μετασχηματισμός Fourier της f)*

$$\widehat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-i\xi x}\, dx. \tag{1.12}$$

Παρατηρήστε ότι το ολοκλήρωμα υπάρχει επειδή $f \in L^1(\mathbb{R})$ και μάλιστα $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \le \|f\|_1$. Δείξτε ότι $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

💡 *Δείξτε το πρώτα με απ' ευθείας υπολογισμό στην περίπτωση που $f = \chi_{[a,b]}$, για $-\infty < a < b < \infty$. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι γραμμική πράξη για να το αποδείξετε για κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις με φραγμένο φορέα. Έπειτα χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 1.33.*

Με ελάχιστες διαφορές αποδεικνύεται το ίδιο θεώρημα και στο $\mathbb{R}^d$. Σε αυτή την περίπτωση το ξx στον εκθέτη του εκθετικού ερμηνεύεται ως το εσωτερικό γινόμενο των $\xi, x \in \mathbb{R}^d$. ✏

✏ **1.36.** *Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της f (ορίστηκε στο Πρόβλημα 1.35) είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.*

💡

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}(\xi+h) - \widehat{f}(\xi)\right| &\le \int |f(x)| \left| e^{-i(\xi+h)x} - e^{-i\xi x}\right| dx \\ &= \int |f(x)| \left| e^{-ihx} - 1 \right| dx.\end{aligned}$$

Για $h \to 0$ ο 2ος παράγοντας στο ολοκλήρωμα συγκλίνει στο 0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης 1.3 για να δείξετε ότι το ολοκλήρωμα πάει στο 0. Η ομοιομορφία ως προς $\xi \in \mathbb{R}$ προκύπτει απ' το ότι το φράγμα (που πάει στο 0) δεν εξαρτάται από το ξ.

Ισχύουν κι εδώ οι παρατηρήσεις του Προβλήματος 1.35 όσον αφορά τη, σχεδόν αυτόματη, γενίκευση στο $\mathbb{R}^d$. ✏

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου

[1] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces*. Princeton University Press, 2009.

[2] Richard L Wheeden. *Measure and integral: an introduction to real analysis*. Vol. 308. CRC Press, 2015.

Κεφάλαιο 2

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Κύριες βιβλιογραφικές αναφορές για αυτό το Κεφάλαιο είναι οι Zygmund 2002, Katznelson 2004 και Stein and Shakarchi 2011.

2.1 Μερικά βασικά περί μιγαδικών αριθμών

Υποθέτουμε ως γνωστές τις βασικές έννοιες μιγαδικών αριθμών. Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι οι «αριθμοί» που μπορεί κανείς να γράφει στη μορφή

$$z = x + iy$$

όπου $x, y \in \mathbb{R}$ και το σύμβολο i έχει την ιδιότητα $i^2 = -1$

Οι ιδιότητες αυτές αρκούν για να μας πουν πώς να επεκτείνουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στους μιγαδικούς αριθμούς

$$\mathbb{C} = \{x + iy : \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

έτσι ώστε να ισχύουν οι συνήθεις ιδιότητες των πράξεων. Κάθε μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ έχει ένα *μέτρο* το

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

κι ένα όρισμα (εκτός το 0) $\theta \in [0, 2\pi)$ που είναι τέτοιο ώστε

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta.$$

Ο μιγαδικός αριθμός

$$\overline{z} = x - iy$$

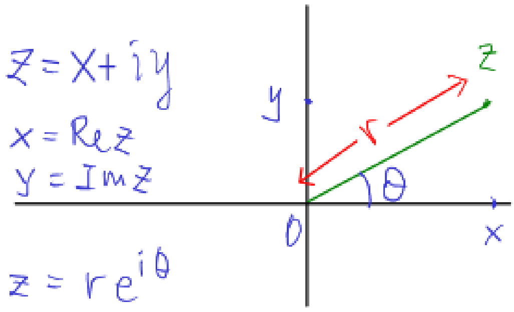
ονομάζεται συζυγής του $z = x + iy$.

Η εκθετική συνάρτηση e^x μπορεί να οριστεί και με μιγαδικό όρισμα από τη σειρά

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots$$

η οποία συγκλίνει για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Για τη συνάρτηση αυτή ισχύει $e^{z+w} = e^z e^w$. Επίσης, αν $\theta \in \mathbb{R}$ ισχύει ο τύπος

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{2.1}$$



Σχήμα 2.1: Ο μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$, με πραγματικό μέρος $x = \operatorname{Re} z$, φανταστικό μέρος $y = \operatorname{Im} z$, μέτρο $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ και όρισμα θ τέτοιο ώστε $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

Η *πολική μορφή* ενός μιγαδικού αριθμού z με μέτρο r και όρισμα θ είναι

$$z = re^{i\theta}.$$

Από την (2.1) προκύπτουν εύκολα οι τύποι

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \tag{2.2}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}),$$

οι οποίοι μας επιτρέπουν να εκφράσουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις με την εκθετική συνάρτηση, κάτι που κάνει τους υπολογισμούς με αυτές τις συναρτήσεις πολύ ευκολότερους. Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας τους άνω τύπους είναι πολύ εύκολο να υπολογίσει κανείς τα ημίτονα και συνημίτονα για το άθροισμα δύο τόξων $\cos(a + b), \sin(a + b)$, χωρίς να χρειάζεται να θυμάται τους τύπους.

✏ **2.1.** *Χρησιμοποιώντας τους τύπους (2.2) βρείτε τύπους για τα $\cos(a+b), \sin(a+b)$ μέσω των τριγωνομετρικών αριθμών των a, b.*

💡*Ποιο το πραγματικό και ποιο το φανταστικό μέρος του $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$;* ✏

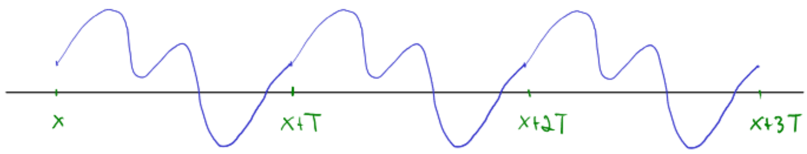
✏ **2.2.** *Λέμε ότι μια ακολουθία $z_n \in \mathbb{C}$ συγκλίνει στο $z \in \mathbb{C}$ αν $|z - z_n| \to 0$ όταν $n \to \infty$. Δείξτε ότι $z_n \to z$ αν και μόνο αν $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$ και $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$.* ✏

2.2 Περιοδικότητα

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ονομάζεται *περιοδική με περίοδο* $T \neq 0$ αν

$$f(x + T) = f(x), \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Για παράδειγμα η συνάρτηση $\sin x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π και η συνάρτηση $e^{2\pi ix}$ είναι περιοδική με περίοδο 1.



Σχήμα 2.2: Το γράφημα μιας περιοδικής συνάρτησης με περίοδο T

✏ **2.3.** *(Σύνολο των περιόδων μιας συνάρτησης)*
Η περίοδος μιας περιοδικής συνάρτησης δεν είναι ποτέ μοναδική. Αποδείξτε ότι το σύνολο των περιόδων μιας συνάρτησης (συμπεριλαμβανομένου του 0, που συνήθως δεν το ονομάζουμε περίοδο) αποτελεί ομάδα. *Αν δηλ. T_1 και T_2 είναι περίοδοι τότε και οι αριθμοί $-T_1, -T_2, T_1+T_2$ είναι επίσης περίοδοι. Δείξτε επίσης ότι κάθε μη σταθερή, συνεχής περιοδική συνάρτηση έχει μια ελάχιστη θετική περίοδο και κάθε άλλη περίοδος της συνάρτησης είναι ακέραιο πολλαπλάσιό της.* ✏

✏ **2.4.** *Οι δυο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ είναι περιοδικές με ελάχιστες θετικές περιόδους τους φυσικούς αριθμούς a και b αντίστοιχα. Δείξτε ότι και η συνάρτηση $f+g$ είναι περιοδική και βρείτε μια περίοδό της. Αν οι a, b είναι πρώτοι μεταξύ τους, δείξτε ότι η ελάχιστη θετική περίοδος της $f+g$ είναι πάντα ο αριθμός $a \cdot b$.* ✏

✏**N 2.1.** *Αν οι δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιοδικές με ελάχιστες θετικές περιόδους τους θετικούς αριθμούς a και b αντίστοιχα δείξτε ότι η $f+g$ δεν είναι κατ' ανάγκη περιοδική. (Αντιπαραβάλλετε με την άσκηση 2.4.) Μπορείτε να βρείτε κάποια συνθήκη που συνδέει τα a και b που να εγγυάται ότι η $f+g$ θα είναι επίσης περιοδική;* ✏

✏ **2.5.** *Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι μια συνεχής (ή, γενικότερα, μια συνάρτηση που είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο διάστημα) T-περιοδική συνάρτηση τότε αν $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε*

$$\int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_y^{y+T} f(t)\,dt.$$

✏

✏ **2.6.** *Κάθε συνάρτηση $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ μπορεί να επεκταθεί ως μια 2π-περιοδική συνάρτηση σε όλο το $\mathbb{R}$ κατά μοναδικό τρόπο με τον τύπο*

$$f(x) = f\left(x - \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor 2\pi\right).$$

Κάθε 2π-περιοδική και συνεχής συνάρτηση, αν περιοριστεί στο διάστημα $[0, 2\pi]$ είναι προφανώς συνεχής. Ισχύει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση στο $[0, 2\pi]$, αν επεκταθεί σε όλο το $\mathbb{R}$ με τον παραπάνω τύπο γίνεται μια συνεχής περιοδική συνάρτηση; Αν όχι, ποια επιπλέον συνθήκη πρέπει να επιβάλλουμε σε μια συνεχή συνάρτηση στο $[0, 2\pi]$ ώστε η περιοδική της επέκταση στο $\mathbb{R}$ να είναι παντού συνεχής; ✏

✏**Ν 2.2.** *Η έννοια της περιοδικότητας υπάρχει σε κάθε προσθετική ομάδα G. Αν $f : G \to \mathbb{C}$ είναι μια συνάρτηση τότε το $g \in G$ λέγεται «περίοδος» της f αν ισχύει*

$$f(x+g) = f(x), \ \forall x \in G.$$

Η f ονομάζεται περιοδική αν υπάρχει $g \in G$, $g \neq 0$, που να είναι περίοδος της f.

Αν $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ έχει τα $g_1, g_2 \in \mathbb{Z}^2$, $g_1, g_2 \neq 0$, ως περιόδους δείξτε τότε ότι η f καθορίζεται από τις τιμές της πάνω στα ακέραια σημεία που βρίσκονται μέσα στο παραλληλόγραμμο που ορίζεται από τα διανύσματα g_1, g_2.

✏**Ν 2.3.** (Περιοδικοποίηση μιας συνάρτησης) *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με τον τύπο*

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n).$$

Δείξτε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ σε μια περιοδική συνάρτηση F με περίοδο 1. Δείξτε επίσης ότι $\int_{[0,1]} F = \int_{\mathbb{R}} f$.

Παρατήρηση 2.1
Οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις $e_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, έχουν όλες περίοδο 2π (αλλά μόνο οι $e_1(x)$ και $e_{-1}(x)$ έχουν ελάχιστη περίοδο 2π), και είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στη μελέτη συναρτήσεων που είναι περιοδικές με αυτή την περίοδο. Είναι όμως αρκετά κοινό, αν θέλουμε να μελετήσουμε φαινόμενα που έχουν άλλη περίοδο, να χρησιμοποιούμε εκθετικές συναρτήσεις που είναι ελαφρώς διαφορετικές. Για παράδειγμα, εξίσου κοινές με τις παραπάνω συναρτήσεις είναι και οι εκθετικές συναρτήσεις $e^{2\pi inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, οι οποίες έχουν περίοδο 1 αντί για 2π. Όλα όσα θα πούμε παρακάτω ισχύουν, φυσικά με τις κατάλληλες ελάχιστες τροποποιήσεις, και σε κάθε τέτοια οικογένεια μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων και για τα αντίστοιχα τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Η αναγωγή από τη μια περίπτωση στην άλλη γίνεται με μια απλή γραμμική αλλαγή μεταβλητής.

2.3 Τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

Ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι ένας πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός, με μιγαδικούς συντελεστές, μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων με περίοδο 2π, δηλ. των συναρτήσεων

$$e_n(x) = e^{inx}, \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ένας άλλος τρόπος να πούμε το ίδιο πράγμα είναι να πούμε ότι τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι συναρτήσεις της μορφής

$$p(x) = \sum_{k=-N}^{N} p_k e_k(x), \tag{2.3}$$

όπου N είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος. Ο αριθμός k ονομάζεται και *συχνότητα* του εκθετικού $e_k(x)$. Η μεγαλύτερη, κατ' απόλυτη τιμή, συχνότητα που εμφανίζεται σ' ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο ονομάζεται βαθμός του πολυωνύμου και συμβολίζεται με $\deg p$. Για παραδειγμα, αν $p(x) = 3e^{-i4x} + 1 + e^{i2x}$ τότε $\deg p = 4$. Έτσι ένα πολυώνυμο της μορφής (2.3) είναι βαθμού το πολύ N.

Τα p_k στην (2.3) ονομάζονται συντελεστές του $p(x)$ και καθορίζονται μοναδικά. Δε μπορεί δηλ. η ίδια συνάρτηση $p(x)$ να γραφεί με δυο διαφορετικούς τρόπους στη γραφή (2.3).

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι 2π-περιοδικές, συνεχείς συναρτήσεις αφού κάθε συνάρτηση $e_n(x) = 2^{inx}$ είναι τέτοια.

2.7. *(Μοναδικότητα των συντελεστών)*
Αν $\sum_{k=-N}^{N} p_k e^{ikx} = \sum_{k=-N}^{N} q_k e^{ikx}$ για κάθε x σε ένα σύνολο $A \subseteq [0, 2\pi)$ με $|A| \geq 2N+1$ τότε $p_k = q_k$ για κάθε k.

Αρκεί να δείξουμε ότι αν $\sum_{k=-N}^{N} p_k e^{ikx} = 0$ για κάθε $x \in A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2N+1}, \ldots\}$ τότε $p_k = 0$ για κάθε k. Δείξτε ότι αρκεί ο $(2N+1) \times (2N+1)$ πίνακας με στοιχεία τα e^{ika_j}, $k = -N, \ldots, N$, $j = 1, 2, \ldots, 2N+1$, να είναι αντιστρέψιμος.

Αυτό ανάγεται σε ένα πίνακα Vandermonde A με $A_{jk} = x_j^k$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

όπου $n = 2N+1$, $j = 0, 2, \ldots, n-1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, και τα $x_j \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι αν όλα τα x_j είναι διαφορετικά τότε ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος υπολογίζοντας την ορίζουσά του και δείχνοντας ότι αυτή ισούται με $\pm$ το γινόμενο όλων των διαφορών $x_r - x_s$, όπου $r \neq s$:

$$\det A = \pm \prod_{\substack{r,s=1,\ldots,n \\ r<s}} (x_r - x_s).$$

Αυτό μπορεί να αποδειχτεί με επαγωγή ως προς το n.

Ένας άλλος τρόπος να αποδείξετε ότι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού $\leq N$ το οποίο μηδενίζεται σε $2N+1$ σημεία έχει όλους τους συντελεστές του μηδενικούς είναι να χρησιμοποιήσετε την αντίστοιχη πρόταση για τα αλγεβρικά πολυώνυμα, ότι δηλ. ένα αλγεβρικό πολυώνυμο βαθμού $\leq M$ που μηδενίζεται σε $M+1$ σημεία στο $\mathbb{C}$ είναι αναγκαστικά το μηδενικό πολυώνυμο, αυτό δηλ. με όλους τους συντελεστές ίσους με το μηδέν. Χρησιμοποιήστε το πολυώνυμο

$$q(z) = p_{-N} + p_{-N+1}z + p_{-N+2}z^2 + \cdots + p_N z^{2N} = z^N \sum_{k=-N}^{N} p_k z^k.$$

Ποια η σχέση των μηδενικών του τριγωνομετρικού πολυωνύμου $p(x)$ με τις ρίζες του αλγεβρικού πολυωνύμου $q(z)$ όταν κοιτάξετε μόνο τα z με $|z| = 1$ και θέσετε $z = e^{ix}$; Μην κάνετε το λάθος όμως να θεωρήσετε ότι το $q(z)$ έχει ρίζα τάξης N στο 0 επειδή $q(z) = z^N \sum_{k=-N}^{N} p_k z^k$ μια και το τελευταίο άθροισμα δεν είναι πολυώνυμο του z.

2.4 Εσωτερικό γινόμενο και ορθογωνιότητα

Αν $f, g \in C([0, 2\pi])$ (ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[0, 2\pi]$) ορίζουμε το *εσωτερικό τους γινόμενο* να είναι η ποσότητα

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Παρατήρηση 2.2
Εδώ $\overline{g(x)}$ είναι το μιγαδικό συζυγές του $g(x)$. Αν οι συναρτήσεις είναι πραγματικές τότε ο παραπάνω ορισμός του εσωτερικού γινομένου δίδεται συνήθως χωρίς το μιγαδικό συζυγές. Επίσης ο παράγοντας $\frac{1}{2\pi}$ χρησιμεύει στο να μετατρέψει το ολοκλήρωμα σε ένα μέσο όρο πάνω στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και απλουστεύονται πολύ με αυτόν τον τρόπο διάφοροι τύποι. Μπορεί όμως σε άλλα κείμενα να δείτε τον ορισμό χωρίς τον παράγοντα αυτό. Για παράδειγμα, αν τα εκθετικά που χρησιμοποιούνται είναι τα $e^{2\pi inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, τότε ο ορισμός του εσωτερικού γινομένου είναι

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Σε πολλά βιβλία επίσης (ιδίως σε βιβλια φυσικής) θα δείτε το εσωτερικό γινόμενο να έχει το συζυγές στον πρώτο παράγοντα αντί για το δεύτερο.

Παρατήρηση 2.3
Δεν είναι απαραίτητο οι δύο συναρτήσεις να είναι συνεχείς για να οριστεί το εσωτερικό τους γινόμενο. Για παράδειγμα, και αυτή είναι μια περίπτωση που θα τη χρησιμοποιήσουμε πολύ, μπορεί η μία συνάρτηση να είναι απλά ολοκληρώσιμη (στο $L^1([0, 2\pi])$ δηλ.) και η άλλη να είναι φραγμένη. Σε αυτή την περίπτωση το ολοκλήρωμα που δίνει το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται αφού ο ολοκληρωτέος είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Μια άλλη σημαντική περίπτωση είναι όταν και οι δύο συναρτήσεις είναι συναρτήσεις στο $L^2([0, 2\pi])$. Σε αυτή την περίπτωση εύκολα βλέπει κανείς ότι ο ολοκληρωτέος είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση και πάλι, από την ανισότητα Cauchy-Schwartz (Θεώρημα 1.7).

Τέλος, από την ανισότητα Hölder (Θεώρημα 1.6) βλέπει κανείς ότι το εσωτερικό γινόμενο μιας L^p και μιας L^q συνάρτησης με

$$1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

επίσης ορίζεται.

✏ **2.8.** *(Αλγεβρικές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου)*
Το εσωτερικό γινόμενο είναι ουσιαστικά γραμμικό στους δύο παράγοντες, αν εξαιρέσουμε την μικρή επιπλοκή που δημιουργεί η ύπαρξη του μιγαδικού συζυγούς στο δεύτερο παράγοντα. Αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες ($f, g, h \in C([0, 2\pi])$):

$$\langle g, f\rangle = \overline{\langle f, g\rangle}$$

$\langle \lambda f + \mu h, g\rangle = \lambda\langle f, g\rangle + \mu\langle h, g\rangle$ *(για $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$)*

$\langle f, \lambda g + \mu h\rangle = \overline{\lambda}\langle f, g\rangle + \overline{\mu}\langle f, h\rangle$ *(για $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$)*

☞ $$\langle f, f\rangle = \|f\|_2^2 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx$$ *(παραλλαγή 2-νόρμας).*

✐

Δύο συναρτήσεις $f, g \in C([0, 2\pi])$ ονομάζονται *ορθογώνιες* αν $\langle f, g\rangle = 0$.

✐ **2.9.** *(Πυθαγόρειο Θεώρημα)*
Αν $f_1, f_2, \ldots, f_n$ είναι ανά δύο ορθογώνιες τότε

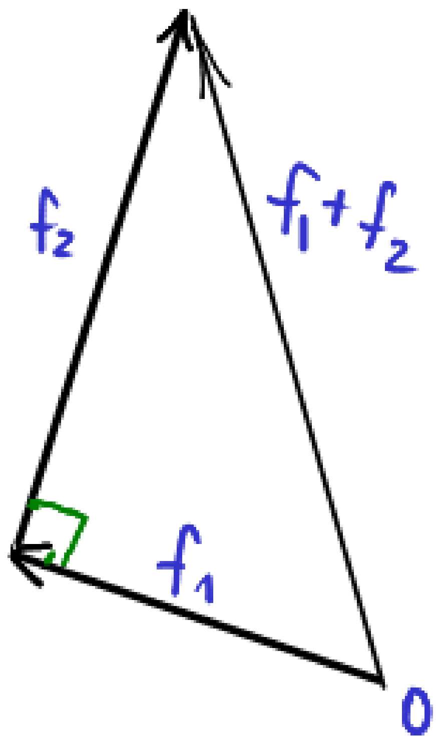
$$\|f_1 + \ldots + f_n\|_2^2 = \|f_1\|_2^2 + \cdots + \|f_n\|_2^2. \tag{2.4}$$

💡 *Χρησιμοποιήστε επαγωγή ως προς n. Για $n = 2$ γράψτε*

$$\|f_1 + f_2\|_2^2 = \langle f_1 + f_2, f_1 + f_2\rangle$$

$$= \langle f_1, f_1\rangle + \langle f_1, f_2\rangle + \langle f_2, f_1\rangle + \langle f_2, f_2\rangle$$

και χρησιμοποιήστε την ορθογωνιότητα. ✐



Σχήμα 2.3: Το άθροισμα δύο ορθογώνιων συναρτήσεων f_1 και f_2 και το Πυθαγόρειο θεώρημα $\|f_1 + f_2\|_2^2 = \|f_1\|_2^2 + \|f_2\|_2^2$

Είναι πολύ βασικό και πολύ χρήσιμο ότι οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις $e_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, είναι ανά δύο ορθογώνιες.

Αν $m \neq n$ και θέτοντας $k = m - n \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle e_m, e_n \rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{imx}e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{ikx}}{ik}\right)'\,dx \\
&= \frac{1}{ik}(e^{ik2\pi} - e^{ik\cdot 0}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ισχύει επίσης $\langle e_n, e_n \rangle = \|e_n\|_2^2 = 1$ για $n \in \mathbb{Z}$. Γι' αυτό το λόγο οι συναρτήσεις $e_n(x)$ λέμε ότι αποτελούν ένα *ορθοκανονικό σύστημα*.

✏ **2.10.** *(Ορθογωνιότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις*

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots$$

είναι ανά δύο ορθογώνιες. Αν τις διαιρέσουμε όλες (εκτός από τη σταθερή συνάρτηση) με $\sqrt{2}$ τότε εκτός από ορθογώνιο σύστημα συναρτήσεων είναι και ορθοκανονικό.

Γενικά οι υπολογισμοί ολοκληρωμάτων με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν είναι από τις πιο απολαυστικές ασχολίες. Είναι πολύ καλύτερο να τις μετατρέψουμε σε μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις και να κάνουμε εκεί τις πράξεις μας μια και οι εκθετικές συναρτήσεις είναι φτιαγμένες για να πολλαπλασιάζονται. Για παράδειγμα, για να δείξετε την ορθογωνιότητα των $\cos mx$ και $\cos nx$ υπολογίστε το ολοκλήρωμα αφού πρώτα γράφετε

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{4}(e^{imx} + e^{-imx})(e^{inx} + e^{-inx}).$$

✏

Θυμίζουμε τον ορισμό της *γραμμικής ανεξαρτησίας* διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_n$ σε ένα διανυσματικό χώρο V: θεωρούνται αυτά γραμμικώς ανεξάρτητα αν για κάθε επιλογή των συντελεστών $c_j \in \mathbb{C}$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$\sum_{k=1}^{n} c_k v_k = 0 \Longrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Οι διανυσματικοί χώροι που μας απασχολούν σε αυτό το μάθημα είναι κατά κανόνα χώροι συναρτήσεων όπως ο $C([0, 2\pi])$ με τον οποίο ασχολούμαστε εδώ. Είναι πολύ βασικό ότι η ορθογωνιότητα συνεπάγεται τη γραμμική ανεξαρτησία. Αν οι μη μηδενικές $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C([0, 2\pi])$ είναι ανά δύο ορθογώνιες τότε, υποθέτοντας ότι έχουμε ένα μηδενιζόμενο γραμμικό συνδυασμό τους

$$0 = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k,$$

και παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο και τον δύο μελών με την f_1, έχουμε

$$0 = \sum_{k=1}^{n} c_k \langle f_k, f_1 \rangle = c_1 \langle f_1, f_1 \rangle = c_1 \|f_1\|_2^2$$

πράγμα που συνεπάγεται $c_1 = 0$ αφού $\|f_1\|_2^2 > 0$ αρκεί η f_1 να μην είναι η μηδενική συνάρτηση. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι όλα τα c_j είναι μηδέν και άρα τα $f_1, \ldots, f_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

✏ **2.11.** *(Η 2-νόρμα ενός τριγωνομετρικού πολυωνύμου)* *Αν* $p(x) = \sum_{k=-N}^{N} p_k e^{ikx}$ *δείξτε ότι*

☞ $$\|p\|_2^2 = \sum_{k=-N}^{N} |p_k|^2.$$

Χρησιμοποιήστε την ορθογωνιότητα των εκθετικών συναρτήσεων και το Πυθαγόρειο Θεώρημα. ✏

✏ **2.12.** *Αποδείξτε ξανά τη μοναδικότητα των συντελεστών των τριγωνομετρικών πολυωνύμων χωρίς τον πίνακα Vandermonde (δείτε το Πρόβλημα 2.7). Αν* $p(x), q(x)$ *είναι δύο τριγωνομετρικά πολυώνυμα που ταυτίζονται σε ολόκληρο το διάστημα* $[0, 2\pi]$ *τότε έχουν τους ίδιους συντελεστές.*

Αποδείξτε ότι οι συντελεστές ενός τριγωνομετρικού πολυωνύμου δίδονται από τον τύπο

☞ $$p_k = \langle p(x), e^{ikx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x) e^{-ikx}\, dx, \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{2.5}$$

✏

✏ **2.13.** *Αποδείξτε ότι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο* $p(x)$ *παίρνει μόνο πραγματικές τιμές αν και μόνο αν για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$ *με* $|k| \le \deg p$ *ισχύει*

$$p_{-k} = \overline{p_k}.$$

✏

Παρατήρηση 2.4
Το δεξί μέλος της (2.5) μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση $p(x)$ *στο διάστημα* $[0, 2\pi]$. *Η ποσότητα αυτή ονομάζεται συντελεστής Fourier* k *τάξης της συνάρτησης* $p(x)$.

✏ **2.14.** *Αν*

$$p(x) = \sum_{k=-N}^{N} p_k e^{ikx}$$

$$q(x) = \sum_{k=-N}^{N} q_k e^{ikx}$$

δείξτε ότι

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \sum_{k=-N}^{N} p_k \overline{q_k}.$$

✏

Έστω $\mathcal{P}_N$ το σύνολο όλων των τριγωνομετρικών πολυωνύμων βαθμού $\leq N$

$$\mathcal{P}_N = \left\{ p(x) = \sum_{k=-N}^{N} p_k e^{ikx} : \quad p_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Αφού το άθροισμα δυο τέτοιων πολυωνύμων παραμένει στοιχείο του $\mathcal{P}_N$ και γινόμενο ενός μιγαδικού αριθμού με στοιχείο του $\mathcal{P}_N$ παραμένει στοιχείο του $\mathcal{P}_N$ προκύπτει ότι το σύνολο αυτό είναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος. Μάλιστα με την αντιστοίχιση

$$p(x) \to (p_{-N}, p_{-N+1}, \ldots, p_{N-1}, p_N)$$

που είναι καλώς ορισμένη (μοναδικότητα των συντελεστών πολυωνύμου), γραμμική και αντιστρέψιμη είναι φανερό πως ο χώρος $\mathcal{P}_N$ είναι ισομορφικός, ως γραμμικός χώρος, με το χώρο $\mathbb{C}^{2N+1}$. Μια βάση του χώρου $\mathcal{P}_N$ αποτελείται από τα $2N+1$ τριγωνομετρικά πολυώνυμα

$$e^{-iNx}, e^{-i(N-1)x}, \ldots, e^{-ix}, 1, e^{ix}, \ldots, e^{iNx}.$$

Αυτή μάλιστα η βάση έχουμε αποδείξει ότι είναι και ορθοκανονική, είναι δηλαδή τα στοιχεία της ανά δύο ορθογώνια και κάθε στοιχείο της έχει 2-νόρμα ίση με 1.

Υπάρχει μια ακόμη ορθοκανονική βάση του $\mathcal{P}_N$ η οποία είναι χρήσιμη στις εφαρμογές, ειδικά όταν πρόκειται για τριγωνομετρικά πολυώνυμα που παίρνουν πραγματικές τιμές.

Θεώρημα 2.1
Οι συναρτήσεις

$$1, \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos Nx,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin Nx$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{P}_N$. Επιπλέον, αν μια συνάρτηση $p(x) \in \mathcal{P}_N$ παίρνει πραγματικές τιμές τότε οι συντελεστές της ως προς αυτή τη βάση είναι πραγματικοί.

Από το Πρόβλημα 2.10 έχουμε την ορθογωνιότητα των συναρτήσεων ανά δύο. Το ότι κάθε μια από αυτές έχει 2-νόρμα ίση με το 1 είναι ένας απλός υπολογισμός που στην περίπτωση της σταθερής συνάρτησης είναι προφανής και σε όλες τις άλλες περιπτώσεις ανάγεται στον τύπο

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}.$$

Για να αποδείξουμε το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος θα υπολογίσουμε ακριβώς τους συντελεστές του πολυωνύμου

$$p(x) = \sum_{k=-N}^{N} p_k e^{ikx}$$

ως πρός τη βάση (2.6). Έστω λοιπόν ότι

$$p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{2.7}$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{a^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right). \tag{2.8}$$

Εξισώνοντας (από τη μοναδικότητα των συντελεστών των τριγωνομετρικών πολυωνύμων) τους συντελεστές των δύο μελών, και παρατηρώντας ότι οι συναρτήσεις e^{ikx} και e^{-ikx} εμφανίζονται μόνο στον k προσθετέο του αθροίσματος (2.8), παίρνουμε ότι $p_0 = a_0$ και για $k = 1, 2, \ldots, N$ ότι

$$p_k e^{ikx} + p_{-k} e^{-ikx} = a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{a^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}.$$

Κάνοντας πράξεις αυτό γράφεται

$$(p_k - a_k/2 - b_k/(2i))e^{ikx} + (p_{-k} - a_k/2 + b_k/(2i))e^{-ikx} = 0.$$

Από τη μοναδικότητα παίρνουμε τις δύο εξισώσεις

$$p_k = a_k/2 + b_k/(2i), \quad p_{-k} = a_k/2 - b_k/(2i). \tag{2.9}$$

Λύνοντας ως προς τις ποσότητες a_k, b_k παίρνουμε

$$a_k = p_k + p_{-k}, \quad b_k = i(p_k - p_{-k}). \tag{2.10}$$

Οι τύποι (2.9) και (2.10), μαζί με τον $a_0 = p_0$, μας λένε το πώς γράφουμε μια συνάρτηση $p(x)$ στην τριγωνομετρική βάση (2.6) αν την έχουμε γραμμένη ως προς την εκθετική βάση και το αντίστροφο.

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $p(x)$ παίρνει πραγματικές τιμές. Έχουμε τότε

$$a_0 = p(0) = \langle p(x), 1 \rangle$$

$$a_k = p_k + p_{-k} = \langle (p(x), e^{ikx} + e^{-ikx} \rangle = 2\langle p(x), \cos kx \rangle$$

$$b_k = i(p_k - p_{-k}) = i\langle p(x), e^{ikx} - e^{-ikx} \rangle = -2\langle p(x), \sin x \rangle.$$

Όλα τα εσωτερικά γινόμενα που εμφανίζονται παραπάνω έχουν και τους δύο παράγοντες πραγματικές συναρτήσεις, άρα είναι πραγματικά.

2.5 Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ λέγεται *άρτια* αν $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (οποιοδήποτε πεδίο ορισμού D μπορούμε να έχουμε εδώ το οποίο είναι συμμετρικό ως προς το 0, ισχύει δηλ. $x \in D \iff -x \in D$). Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ λέγεται *περιττή* αν ισχύει $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Είναι φανερό ότι το να είναι μια συνάρτηση άρτια ή περιττή είναι μια σχετικά σπάνια ιδιότητα; οι «πιο πολλές» συναρτήσεις δεν είναι ούτε το ένα ούτε το άλλο. Παρ' όλ' αυτά ισχύει το παρακάτω θεώρημα το οποίο κάποιες φορές μας επιτρέπει να περάσουμε ιδιότητες των αρτίων και των περιττών συναρτήσεων σε γενικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 2.2
Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ τότε υπάρχει μια άρτια συνάρτηση $f_e : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ και μια περιττή συνάρτηση $f_o : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ τ.ώ. $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μάλιστα αυτή η διάσπαση της f σε άθροισμα περιττής και άρτιας συνάρτησης είναι μοναδική.

Η απόδειξη είναι εξαιρετικά απλή. Παίρνουμε

$$f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Είναι φανερό ότι $f = f_e + f_o$ και ότι η f_e είναι άρτια και η f_o περιττή.

Για να δείξουμε τη μοναδικότητα υποθέτουμε ότι υπάρχει και δεύτερη διάσπαση της f σε άθροισμα άρτιας και περιττής συνάρτησης

$$f = \widetilde{f}_e + \widetilde{f}_o.$$

Από την ισότητα $f_e + f_o = \widetilde{f}_e + \widetilde{f}_o$ παίρνουμε

$$f_e - \widetilde{f}_e = \widetilde{f}_o - f_o.$$

Το αριστερό μέλος είναι άρτια συνάρτηση και το δεξί περιττή (ως γραμμικός συνδυασμός αντιστοίχων συναρτήσεων). Όμως η μόνη συνάρτηση που υπάρχει που είναι ταυτόχρονα άρτια και περιττή είναι η μηδενική συνάρτηση, άρα $f_e = \widetilde{f}_e$ και $f_o = \widetilde{f}_o$.

Οι συναρτήσεις f_e και f_o ονομάζονται *άρτιο και περιττό μέρος της f*.

✏ **2.15.** *Αν $p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο γραμμένο στην τριγωνομετρική του μορφή τότε βρείτε τις συναρτήσεις $p_e(x)$ και $p_o(x)$ γραμμένες επίσης στην τριγωνομετρική τους μορφή. Ίδιο ερώτημα αν το τριγ. πολυώνυμο $p(x)$ δίδεται στην εκθετική του μορφή*

$$p(x) = \sum_{k=-N}^{N} p_k e^{ikx}.$$

✏

2.6 Προβλήματα

✏ **2.16.** *Αποδείξαμε παραπάνω ότι οποιοσδήποτε πεπερασμένος $\mathbb{C}$-γραμμικός συνδυασμός των εκθετικών συναρτήσεων e^{inx}, με $n \in \mathbb{Z}$, δε μπορεί να είναι η μηδενική συνάρτηση εκτός αν όλοι οι συντελεστές είναι 0 (γραμμική ανεξαρτησία). Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε είναι ότι δείξαμε πρώτα ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι μεταξύ τους ορθογώνιες στο διάστημα $[0, 2\pi]$, ισχύει δηλαδή*

$$\langle e^{imx}, e^{inx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x}\, dx = 0$$

αν $m \neq n$. Αυτό παύει να ισχύει αν οι συχνότητες δεν είναι ακέραια πολλαπλάσια του ίδιου αριθμού. Αν λοιπόν $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί τότε χρειαζόμαστε κάποια άλλη μέθοδο για να δείξουμε ότι οι εκθετικές συναρτήσεις

$$e^{i\lambda_1 x}, e^{i\lambda_2 x}, \ldots, e^{i\lambda_n x}$$

είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητες. Δείξτε το αυτό υποθέτοντας ότι $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j e^{i\lambda_j x} = 0$ και παίρνοντας N-οστές παραγώγους της f για N πολύ μεγάλο. Εξηγήστε γιατί δε μπορεί να μηδενίζεται ταυτοτικά η $f^{(N)}(x)$. Εξηγήστε επίσης γιατί η συνθήκη $0 < \lambda_1$ παραπάνω δε χρειάζεται και μπορούν τα λ_j να είναι οποιοιδήποτε διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί. ✏

✏ **2.17.** *Ένα υποσύνολο $G \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται (προσθετική) υποομάδα αν για κάθε $a, b \in G$ ισχύει $a - b \in G$. Π.χ. οι ακέραιοι είναι προσθετική υποομάδα του $\mathbb{R}$ και επίσης το σύνολο*

$$H = \left\{ m + n\sqrt{2} : m, n \in \mathbb{Z} \right\} \tag{2.11}$$

είναι υποομάδα. Έστω G υποομάδα του $\mathbb{R}$ που έχει κάποιο σημείο συσσώρευσης. Δείξτε ότι η G είναι πυκνή στο $\mathbb{R}$, ότι κάθε ανοιχτό διάστημα δηλαδή περιέχει στοιχεία της G.

💡 *Βρείτε, για κάθε $\epsilon > 0$, δύο διαφορετικά στοιχεία $g_1, g_2 \in G$ που να απέχουν το πολύ ϵ. Τότε οι αριθμοί $k(g_1 - g_2)$, $k \in \mathbb{Z}$, ανήκουν στην G.*

Τέλος, δείξτε ότι η υποομάδα H στην (2.11) είναι πυκνή στο $\mathbb{R}$.

💡 *Το ότι $\sqrt{2}$ είναι άρρητος συνεπάγεται ότι διαφορετικά m, n μας δίνουν διαφορετικούς αριθμούς $m + n\sqrt{2}$. Δείξτε ότι η H έχει σημείο συσσώρευσης δείχνοντας ότι έχει άπειρα στοιχεία στο διάστημα $[0, 1]$.* ✏

✏ **2.18.** *Ένα αλγεβρικό πολυώνυμο είναι μια συνάρτηση της μορφής*

$$p(z) = p_0 + p_1 z + \cdots + p_n z^n,$$

όπου $p_j \in \mathbb{C}$ και η μεταβλητή z είναι επίσης μιγαδική. Ένα πολυώνυμο Laurent είναι μια συνάρτηση της μορφής

$$q(z) = q_{-n} z^{-n} + q_{-n+1} z^{-n+1} + \cdots + q_n z^n,$$

η οποία βεβαίως δεν ορίζεται στο 0 *αλλά στο* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *αν υπάρχουν αρνητικοί εκθέτες. Ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στα τριγωνομετρικά πολυώνυμα και στα πολυώνυμα Laurent περιορισμένα στον μοναδιαίο κύκλο*

$$\{z : |z| = 1\} = \left\{e^{it} : t \in \mathbb{R}\right\}$$

του μιγαδικού επιπέδου; ✐

✐ **2.19.** *Εξηγήστε ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις* 2π*-περιοδικές συναρτήσεις* $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *και στις μιγαδικές συναρτήσεις που ορίζονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο* $\{|z| = 1\}$. ✐

✐ **2.20.** *Έστω* $p(x) = \sum_k p_k e^{ikx}$ *και* $q(x) = \sum_k q_k e^{ikx}$ *δύο τριγωνομετρικά πολυώυμα. (Αυτό σημαίνει ότι οι δύο ακολουθίες συντελεστών* p_k, q_k *είναι τελικά μηδενικές, υπάρχει δηλ. ένας πεπερασμένος φυσικός αριθμός* N *τ.ώ.* $p_k = q_k = 0$ *όταν* $|k| > N$*.) Αν*

$$r(x) = \sum_k r_k e^{ikx} = p(x)q(x)$$

είναι το γινόμενό τους δείξτε ότι οι συντελεστές του $r(x)$ *δίνονται μέσω των συντελεστών των* $p(x)$ *και* $q(x)$ *από τους τύπους*

$$r_k = \sum_n p_n q_{k-n} = \sum_n q_n p_{k-n}. \tag{2.12}$$

Η ακολουθία r_k *ονομάζεται και συνέλιξη των ακολουθιών* p_k *και* q_k*. Παρατηρήστε ότι το άθροισμα στην (2.12) είναι πεπερασμένο ακριβώς επειδή οι ακολουθίες* p_k *και* q_k *είναι τελικά μηδενικές.* ✐

✐ **2.21.** *Αν* $p(x) = \sum_{n=-N}^{N} p_n e^{inx}$ *είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο και* $k \in \mathbb{Z}$ *δείξτε ότι και η συνάρτηση* $p(x)e^{ikx}$ *είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο και βρείτε ποιοι είναι οι συντελεστές του.* ✐

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου

[1] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Cambridge University Press, 2004.

[2] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Fourier analysis: an introduction*. Vol. 1. Princeton University Press, 2011.

[3] Antoni Zygmund. *Trigonometric series*. Cambridge University Press, 2002.

Κεφάλαιο 3

Συντελεστές και σειρές Fourier

Κύριες βιβλιογραφικές αναφορές για αυτό το Κεφάλαιο είναι οι Zygmund 2002, Katznelson 2004 και Stein and Shakarchi 2011.

3.1 Συντελεστές Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης και σειρά Fourier

Ας είναι τώρα $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε και η συνάρτηση $f(x)e^{ikx}$ είναι ολοκληρώσιμη (αφού έχει το ίδιο μέτρο με την f) όποιο και να είναι το $k \in \mathbb{Z}$, και άρα μπορούμε να ορίσουμε το n-οστό συντελεστή Fourier της f από τον τύπο

$$\widehat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx. \tag{3.1}$$

Από την τριγωνική ανισότητα για το ολοκλήρωμα

$$\left| \int g \right| \le \int |g|$$

προκύπτει άμεσα η ανισότητα

$$\left| \widehat{f}(n) \right| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|. \tag{3.2}$$

✏ **3.1.** *Αν* $f \ge 0$ *δείξτε ότι* $\widehat{f}(0) \ge \left| \widehat{f}(k) \right|$, $(k \in \mathbb{Z})$. ✏

Για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση f μπορεί κανείς να δείξει ότι

$$\widehat{f}(n) \to 0$$

για $|n| \to \infty$. Αυτό είναι το λεγόμενο Λήμμα Riemann-Lebesgue (δείτε Πρόβλημα 1.35).

Έχοντας ορίσει τους συντελεστές Fourier της f ορίζουμε τώρα και τη <u>σειρά Fourier</u> ως τη σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}.$$

Στη σειρά αυτή το n απειρίζεται και προς τα δεξιά (το συνηθισμένο) και προς τα αριστερά. Τι σημαίνει για μια σειρά μιγαδικών αριθμών

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$$

ότι το άθροισμά της είναι ο αριθμός $L \in \mathbb{C}$; Πολύ απλά ότι το L είναι το όριο των <u>συμμετρικών</u> μερικών αθροισμάτων της σειράς

$$L = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n.$$

Για να υποδηλώσουμε ότι μια σειρά είναι η σειρά Fourier της f γράφουμε συνήθως

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}.$$

Δε χρησιμοποιούμε το σύμβολο $=$ ακριβώς για να τονίσουμε ότι κατ' αρχήν δεν κάνουμε κανένα ισχυρισμό όσον αφορά τη σύγκλιση της σειράς και μάλιστα στην $f(x)$. Το μεγαλύτερο μέρος της κλασικής Αρμονικής Ανάλυσης αφορά ακριβώς το να ξεκαθαρίσουμε υπό ποιες συνθήκες (για την f) ισχύει μια τέτοια σύγκλιση ή σύγκλιση κάποιου άλλου είδους (π.χ. ομοιόμορφη σύγκλιση των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier).

Τα συμμετρικά μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της f όμως είναι τριγ. πολυώνυμα και άρα είναι ταυτόχρονα και συναρτήσεις (δεν τίθεται εδώ θέμα σύγκλισης):

$$S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{ikx}, \quad N = 0, 1, 2, \ldots, \ x \in \mathbb{R}.$$

(Προσέξτε ότι το όνομα της συνάρτησης είναι $S_N(f)$ και $S_N(f)(x)$ είναι η τιμή της συνάρτησης αυτής στο x. Σε άλλα βιβλία μπορεί να δείτε αντί για τον παραπάνω συμβολισμό να χρησιμοποιείται το $S_N(f,x)$ ή και κάτι σαν $S_N^f(x)$.)

Ένα κεντρικό πρόβλημα της Αρμονικής Ανάλυσης είναι λοιπόν το κατά πόσο τα μερικά αθροίσματα $S_N(f)(x)$ συγκλίνουν στη συνάρτηση $f(x)$ όταν $N \to \infty$ και με ποια έννοια συγκλίνουν (κατά σημείο, ομοιόμορφα, σε κάποια ολοκληρωτική νόρμα όπως θα δούμε αργότερα).

✏ **3.2.** *Ποιοι οι συντελεστές Fourier της συνάρτησης* $f(x) = 1$*;* ✏

✏ **3.3.** *Η* 2π*-περιοδική συνάρτηση* f *ορίζεται στο διάστημα* $[-\pi, \pi]$ *από τον τύπο*

$$f(x) = x, \text{ αν } x \in (-\pi, \pi) \text{ και } 0 \text{ αν } x = \pm\pi.$$

Δείξτε (χρησιμοποιήστε ολοκλήρωση κατά μέρη) ότι οι συντελεστές Fourier της f *είναι οι*

$$\widehat{f}(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{in}$$

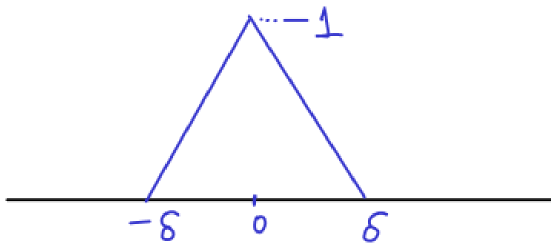
για $n \neq 0$ *και* $\widehat{f}(0) = 0$.

Παρατήρηση: Δεν έχει ιδιαίτερη σημασία το ποιες είναι οι τιμές της f *στα άκρα του διαστήματος* $[-\pi, \pi]$ *αφού όπως και να οριστεί εκεί τα ολοκληρώματα που ορίζουν τα* $\widehat{f}(n)$ *δεν επηρεάζονται.* ✐

✏ **3.4.** *Η συνάρτηση* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *δίνεται από τον τύπο* $f(x) = (\pi - x)^2/4$. *Δείξτε ότι η σειρά Fourier της* f *είναι η*

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n\neq 0} \frac{e^{inx}}{2n^2} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

✐



Σχήμα 3.1: Η συνάρτηση του προβλήματος 3.5

✏ **3.5.** *Αν* $0 < \delta < \pi$ *υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της συνάρτησης* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ *με τριγωνικό γράφημα που δίνεται από τον τύπο*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{\delta} & (|x| \leq \delta) \\ 0 & (\delta \leq |x| \leq \pi). \end{cases}$$

✐

✏ **3.6.** *Αν* $a_n, b_n, n = 1, 2, \ldots, N$ *είναι μιγαδικοί αριθμοί και* $B_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$ *δείξτε τον πολύ χρήσιμο τύπο της άθροισης κατά μέρη (που είναι το ανάλογο για αθροίσματα του τύπου της ολοκλήρωσης κατά μέρη)*

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n. \qquad (3.3)$$

✐

✏ **3.7.** *Αν* $a_n \to 0$ *είναι φθίνουσα ακολουθία και τα μερικά αθροίσματα της σειράς* $\sum_n b_n$ *είναι φραγμένα τότε η σειρά* $\sum_n a_n b_n$ *συγκλίνει.*

💡 *Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 3.6.* ✐

✏ **3.8.** *Αν* f_k, f *είναι* 2π*-περιοδικές και ολοκληρώσιμες στο* $[0, 2\pi]$ *και (σύγκλιση στο* $L^1([0, 2\pi])$*)*

$$\int_0^{2\pi} |f_k(x) - f(x)|\, dx \to 0. \quad (k \to \infty)$$

τότε έχουμε

$$\lim_{k\to\infty} \widehat{f_k}(n) \to \widehat{f}(n),$$

ομοιόμορφα για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$. ✐

3.2 Παραδείγματα σειρών Fourier και τριγωνομετρικών σειρών

Όταν μιλάμε για μια σειρά του τύπου $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$, με $a_n \in \mathbb{C}$, μια σειρά δηλαδή διπλής κατεύθυνσης, θα εννοούμε πάντα τη σύγκλισή της ως σύγκλιση των συμμετρικών μερικών αθροισμάτων της

$$S_N = \sum_{n=-N}^{N} a_n = a_{-N} + a_{-N+1} + \cdots + a_0 + \cdots + a_{N-1} + a_N,$$

όταν $N \to \infty$. Όταν μιλάμε για τριγωνομετρική σειρά εννοούμε μια σειρά συναρτήσεων του τύπου

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Οι σειρές Fourier ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι λοιπόν ειδικές περιπτώσεις τριγωνομετρικών σειρών, όπου οι συντελεστές της σειράς ταυτίζονται με τους συντελεστές Fourier κάποιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης. Το γενικό ερώτημα του πότε μια τριγωνομετρική σειρά είναι σειρά Fourier είναι ένα δύσκολο ερώτημα που δεν έχει ουσιαστικά απαντηθεί. Η θεωρία των τριγωνομετρικών σειρών έχει αναπτυχθεί ιδιαίτερα σε σχέση με ερωτήματα τύπου συνόλων μοναδικότητας (sets of uniqueness), ερωτήματα που έχουν συμβάλλει πάρα πολύ στην ανάπτυξη της Μαθηματικής Ανάλυσης και όχι μόνο. Για παράδειγμα, η Θεωρία Συνόλων οφείλει τη δημιουργία της στον G. Cantor ο οποίος τη θεμελίωσε για να απαντήσει ερωτήματα πάνω σε σύνολα μοναδικότητας τριγωνομετρικών σειρών. Σε αυτό το μάθημα δε θα ασχοληθούμε σχεδόν καθόλου με τριγωνομετρικές σειρές που δεν είναι σειρές Fourier.

3.2.1 Απόλυτα συγκλίνουσες τριγωνομετρικές σειρές

Στην περίπτωση που οι συντελεστές μιας τριγωνομετρικής σειράς φθίνουν αρκετά γρήγορα η σειρά αυτή αναμένεται να έχει κάποιες καλές ιδιότητες. Το ακόλουθο είναι ένα τυπικό (και εύκολο) παράδειγμα ενός τέτοιου θεωρήματος (μικροί συντελεστές $\to$ ομαλή συνάρτηση).

Θεώρημα 3.1
Αν $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$ τότε η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση.

Απόδειξη.
Κατ' αρχήν η σειρά συγκλίνει σε μια συνάρτηση $f(x)$ επειδή συγκλίνει απόλυτα, λόγω της υπόθεσής μας. Το ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι 2π-περιοδική είναι προφανές. Ας είναι $S_N(x)$ τα μερικά αθροίσματα. Τότε

$$|f(x) - S_N(x)| = \left| \sum_{|n|>N} a_n e^{inx} \right| \tag{3.4}$$

$$\leq \sum_{|n|>N} \left|a_n e^{inx}\right| \tag{3.5}$$

$$= \sum_{|n|>N} |a_n| \tag{3.6}$$

$$=: t_N. \tag{3.7}$$

Όμως η ποσότητα t_N δεν εξαρτάται από το x και τείνει στο 0 αφού είναι η (διπλής κατεύθυνσης) ουρά μιας συγκλίνουσας σειράς. Έχουμε συνεπώς δείξει ότι

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - S_N(x)| \to 0 \ \text{ για } N \to \infty,$$

δηλαδή ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε όλο το $\mathbb{R}$. Τέλος, επειδή οι $S_N(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις (αφού η καθεμία τους είναι πεπερασμένο άθροισμα συνεχών) έπεται από την ομοιόμορφη σύγκλιση ότι και η $f(x)$ είναι συνεχής. ∎

Έστω $0 \leq r < 1$. Τότε, από το Θεώρημα 3.1, η τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $P_r(x)$ την οποία ονομάζουμε πυρήνα Poisson και η οποία είναι πάρα πολύ σημαντική στη θεωρία των αρμονικών και αναλυτικών συναρτήσεων. Μπορούμε εύκολα να βρούμε ένα κλειστό τύπο για τον πυρήνα του Poisson αν γράψουμε τη σειρά στη μορφή $1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-inx}$ και εφαρμόσουμε τον τύπο για την άθροιση της άπειρης γεωμετρικής σειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1), \tag{3.8}$$

ο οποίος είναι άμεση συνέπεια του (4.15). Καταλήγουμε στον τύπο

$$P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} \tag{3.9}$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx$$

$$= \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} \quad (0 \leq r < 1).$$

Τι σχέση έχει η συνάρτηση που ορίζει η σειρά Fourier μιας συνάρτησης f με την ίδια την f; Ένα πρώτο βήμα για να το απαντήσουμε αυτό είναι το επόμενο Θεώρημα που αφορά και πάλι την περίπτωση που οι συντελεστές Fourier της f φθίνουν τόσο γρήγορα ώστε να είναι μια αθροίσιμη ακολουθία (το άθροισμα των απολύτων τιμών τους να είναι πεπερασμένο).

Θεώρημα 3.2
Αν f είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right| < \infty$ τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση που έχει τους ίδιους συντελεστές Fourier με την f.

Απόδειξη.
Από το Θεώρημα 3.1 προκύπτει ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση g, ισχύει δηλ. $g(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(f)(x)$ και το όριο είναι ομοιόμορφο. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση προκύπτει ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{g}(n) = \lim_{N\to\infty} \widehat{S_N(f)}(n)$$

αφού

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{g}(n) - \widehat{S_N(f)}(n)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(g(x) - S_N(f)(x))e^{-inx}\,dx\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(x) - S_N(f)(x)|\,dx \\
&\le \sup_{x\in[0,2\pi]} |g(x) - S_N(f)(x)| \\
&\to 0 \quad (\text{από την ομοιόμορφη σύγκλιση}).
\end{aligned}$$

Αλλά οι συναρτήσεις $S_N(f)(x)$ είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα άρα

$$\widehat{S_N(f)}(n) = \widehat{f}(n) \quad \text{για } |N| \ge |n|,$$

άρα, για n σταθερό, η ακολουθία $\widehat{S_N(f)}(n)$ είναι τελικά σταθερή αν το N είναι αρκετά μεγάλο και συνεπώς $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n)$. ∎

3.3 Απλές πράξεις πάνω σε μια συνάρτηση και πώς επηρεάζονται οι συντελεστές Fourier

Αν είναι $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση που είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi]$. Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ τότε και η συνάρτηση

$$(\tau_\alpha f)(x) = f(x - \alpha)$$

είναι επίσης 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi]$. Ένας εύκολος υπολογισμός (ορισμός ακολουθούμενος από μια αλλαγή μεταβλητής) μας δίνει την εξής σχέση ανάμεσα στους συντελεστές Fourier της $\tau_\alpha f$ και της f:

$$\widehat{\tau_\alpha f}(n) = e^{-in\alpha}\widehat{f}(n). \tag{3.10}$$

✏ **3.9.** *Αποδείξτε τη σχέση (3.10).* ✏

Η απεικόνιση $f \to \tau_\alpha f$ ονομάζεται *τελεστής* μετατόπισης (παραδοσιακά στα μαθηματικά ονομάζουμε *συναρτήσεις* τις απεικονίσεις που στέλνουν «σημεία» σε αριθμούς ενώ χρησιμοποιούμε τη λέξη *τελεστής* για μια απεικόνιση που στέλνει συναρτήσεις, ή άλλα «πολύπλοκα» αντικείμενα, σε συναρτήσεις) και είναι μάλιστα *γραμμικός* τελεστής, ικανοποιεί δηλ. τη σχέση

$$\tau_\alpha(\lambda f + \mu g) = \lambda \tau_\alpha f + \mu \tau_\alpha g, \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}).$$

Για να είμαστε ακριβείς θα πρέπει να καθορίσουμε και σε ποιο χώρο ανήκουν οι διάφορες συναρτήσεις στις οποίες αναφερόμαστε. Αυτό δεν έχει και τόση μεγάλη σημασία όταν πρόκειται να μιλήσουμε για ιδιότητες συναρτήσεων που αποδεικνύονται κυρίως με αλγεβρικά ή φορμαλιστικά επιχειρήματα (κοινώς: με πράξεις) οπότε ας πούμε ότι όλες οι συναρτήσεις στις οποίες αναφερόμαστε ανήκουν στο χώρο X των συναρτήσεων $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που είναι 2π-περιοδικές και συνεχείς.

Αν συμβολίσουμε και με Y το χώρο όλων των μιγαδικών ακολουθιών (με δείκτες $n \in \mathbb{Z}$) τότε μπορούμε να δούμε την απεικόνιση

$$f \to (f(n))_{n \in \mathbb{Z}}$$

ως ένα τελεστή από το χώρο X στο χώρο Y, τον οποίο συμβολίζουμε με $\mathcal{F}$:

$$(\mathcal{F} f)(n) = \widehat{f}(n).$$

Ορίζουμε τέλος τον τελεστή $m_\alpha : Y \to Y$ να είναι ο «πολλαπλασιαστής»

$$(m_\alpha a)_n = e^{-in\alpha} a_n.$$

Και οι τρεις αυτοί τελεστές που ορίσαμε είναι γραμμικοί.

Έχοντας ορίσει τους τελεστές και τους χώρους που εμφανίζονται στην (3.10) μπορούμε τώρα να ξαναγράψουμε τη σχέση αυτή ως μια σχέση αντιμετάθεσης τελεστών

$$\mathcal{F} \tau_\alpha = m_\alpha \mathcal{F}. \tag{3.11}$$

ή ως ένα αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\tau_\alpha"] & Y \arrow[d, "m_\alpha"] \\ X \arrow[r, "\mathcal{F}"] & Y \end{tikzcd} \tag{3.12}$$

Ο τρόπος που ερμηνεύουμε τη σχέση (3.11) καθώς και το διάγραμμα (3.12) είναι ότι το να εφαρμόσουμε σε μια συνάρτηση πρώτα τον τελεστή τ_α και μετά τον τελεστή Fourier $\mathcal{F}$ (αριστερό μέλος της (3.11) ή κάτω-και-μετά-δεξιά κίνηση στο διάγραμμα (3.12)) είναι το ίδιο με πρώτα να εφαρμόσουμε τον τελεστή Fourier $\mathcal{F}$ και μετά τον πολλαπλασιαστή m_α (δεξί μέλος της (3.11) ή δεξιά-και-μετά-κάτω κίνηση στο διάγραμμα (3.12)).

Μπορούμε να ορίσουμε τους τελεστές μετατόπισης τ πάνω στο χώρο Y και τους πολλαπλασιαστές m πάνω στο χώρο X:

$$(\tau_k a)_n = a_{n-k}, \quad \text{για κάθε ακολουθία } a \in Y,$$

και

$$(m_k f)(x) = e^{ikx} f(x), \quad \text{για κάθε συνάρτηση } f \in X.$$

Παρατηρήστε ότι για να έχουν νόημα αυτοί οι τελεστές πρέπει η παράμετρος της μετατόπισης να είναι ακέραια και η συχνότητα του εκθετικού με το οποίο πολλαπλασιάζουμε να είναι επίσης ακέραια (ώστε να μη χαλάει η περιοδικότητα της συνάρτησης).

✏ **3.10.** *Δείξτε ότι $\mathcal{F} m_k = \tau_k \mathcal{F}$ αφού πρώτα γράψετε αυτή την ισότητα τελεστών σε μορφή παρόμοια με την σχέση (3.10).*

Δύο άλλοι γραμμικοί τελεστές που είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι, και οι οποίοι επίσης ορίζονται και πάνω σε συναρτήσεις και πάνω σε ακολουθίες (στους χώρους X και Y δηλαδή) είναι οι τελεστές της ανάκλασης A και συζυγίας C:

$$(Af)(x) = f(-x), \quad (Aa)_n = a_{-n}, \quad \text{για } f \in X, a \in Y,$$

και

$$(Cf)(x) = \overline{f(x)}, \quad (Ca)_n = \overline{a_n}, \quad \text{για } f \in X, a \in Y.$$

✏ **3.11.** *Δείξτε τις ισότητες*

$$\mathcal{F}A = A\mathcal{F} \quad \textit{και} \quad \mathcal{F}C = CA\mathcal{F},$$

αφού πρώτα τις γράψετε στη μορφή (3.10).

✏ **3.12.** *Αν f είναι άρτια συνάρτηση ($f(-x) = f(x)$) δείξτε ότι η σειρά Fourier της f μπορεί να γραφεί ως σειρά συνημιτόνων $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$. Ποια η σχέση των a_n με τους συντελεστές Fourier της f;*

Ομοίως αν η f είναι περιττή ($f(-x) = -f(x)$) δείξτε ότι η σειρά Fourier της f μπορεί να γραφεί ως σειρά συνημιτόνων $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx$. Ποια η σχέση των a_n με τους συντελεστές Fourier της f;

✏ **3.13.** *Αν η f είναι π-περιοδική τότε $\widehat{f}(n) = 0$ για κάθε περιττό n.*

✏ **3.14.** *Δείξτε ότι αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\widehat{f}(-n) = \overline{\widehat{f}(n)}$.*

✏ **3.15.** *Αν f είναι 2π-περιοδική συνάρτηση και $k \in \mathbb{N}$ τι σχέση έχει το γράφημα της $g(x) = f(kx)$ με το γράφημα της f; Ποια η περίοδος της $g(x)$;*

Ποιο το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} g(x)\,dx$ σε σχέση με αυτό της f;

Ποιοι οι συντελεστές Fourier της $g(x)$;

3.4 Ο κύκλος $\mathbb{T}$. Οι χώροι συναρτήσεων $C^j(\mathbb{T})$ και $L^p(\mathbb{T})$

Οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ των οποίων παίρνουμε τους συντελεστές Fourier είναι πάντα 2π-περιοδικές και πρέπει επίσης να είναι ολοκληρώσιμες στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

✏ **3.16.** *Δείξτε ότι αν μια συνάρτηση έχει περίοδο T τότε το ολοκλήρωμά της πάνω σε οποιοδήποτε διάστημα μήκους T είναι το ίδιο.* ✏

✏ **3.17.** *Δείξτε ότι μια 2π-περιοδική συνάρτηση που είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi]$ δε μπορεί να είναι ολοκληρώσιμη και στο $\mathbb{R}$ εκτός αν είναι ίση με μηδέν σχεδόν παντού.* ✏

Σημαντική ειδική περίπτωση αυτών είναι οι συνεχείς 2π-περιοδικές συναρτήσεις, αφού κάθε συνεχής συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη σε οποιοδήποτε φραγμένο κλειστό διάστημα αφού είναι φραγμένη σε αυτό.

Ορισμός 3.1
Θα λέμε ότι μια συνάρτηση ανήκει στο χώρο $C(\mathbb{T})$ αν είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ και 2π-περιοδική. Θα λέμε γενικότερα ότι μια συνάρτηση ανήκει στο χώρο $C^j(\mathbb{T})$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ αν είναι 2π-περιοδική και η j-τάξης παράγωγός της υπάρχει και είναι συνεχής παντού. (Ως μηδενικής τάξης παράγωγος της f θεωρείται η ίδια η f.)

Εν γένει αν E είναι ένα σύνολο πάνω στην οποίο ορίζονται συναρτήσεις (με πραγματικές ή μιγαδικές τιμές) τότε με $C(E)$ συμβολίζουμε εκείνες τις συναρτήσεις που είναι συνεχείς. Για να υπάρχει κάποια συμβατότητα αυτού του γενικού ορισμού με τον ορισμό για το $C(\mathbb{T})$ που δώσαμε παραπάνω θα πρέπει κατ' αρχήν να δώσουμε ένα νόημα στο σύμβολο $\mathbb{T}$, να ορίσουμε δηλ. ένα χώρο τέτοιο ώστε οι συνεχείς συναρτήσεις πάνω σε αυτόν να «είναι» οι 2π-περιοδικές συναρτήσεις πάνω στο $\mathbb{R}$ που είναι συνεχείς.

Ο χώρος $\mathbb{T}$ (που τον ονομάζουμε και *κύκλο* και μιλάμε συχνά για συνεχείς συναρτήσεις πάνω στον κύκλο όταν θέλουμε να μιλήσουμε για συνεχείς και περιοδικές συναρτήσεις) ορίζεται να είναι εκείνος ο τοπολογικός χώρος που προκύπτει αν ορίσουμε τη σχέση ισοδυναμίας πάνω στο $\mathbb{R}$

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in (2\pi)\mathbb{Z},$$

(όπου με $(2\pi)\mathbb{Z}$ συμβολίζουμε όλα τα ακέραια πολλαπλάσια του 2π) και κατόπιν ταυτίσουμε μεταξύ τους όλα τα ισοδύναμα στοιχεία. Εύκολα βλέπει κανείς ότι η κλάση ισοδυναμίας του $x \in \mathbb{R}$ είναι οι αριθμοί $x + (2\pi)k$, $k \in \mathbb{Z}$, οπότε ανά δύο τα στοιχεία του $[0, 2\pi)$ δεν είναι μεταξύ τους ισοδύναμα και κάθε κλάση ισοδυναμίας έχει μοναδικό αντιπρόσωπο στο $[0, 2\pi)$. Οι δε αριθμοί 0 και 2π είναι μεταξύ τους ισοδύναμοι και άρα μπορούμε να βλέπουμε το χώρο $\mathbb{T}$ ως ένα κύκλο ή, με άλλα λόγια, να βλέπουμε το χώρο $\mathbb{T}$ ως το $[0, 2\pi]$ όπου όμως τα σημεία 0 kai 2π είναι ίδια και αν κινηθούμε από τα αριστερά προς το 2π τότε μόλις το περάσουμε βρισκόμαστε στα δεξιά του 0.

Είναι φανερό ότι κάθε συνεχής και 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ορίζει μια συνεχή συνάρτηση πάνω στο χώρο $\mathbb{T}$ και αντίστροφα. Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε το σύμβολο $C(\mathbb{T})$.

Όμως όποιος δυσκολεύται να κατανοήσει τις τοπολογικές έννοιες που αναφέρουμε πιο πάνω μπορεί να κρατήσει τον Ορισμό 3.1 ο οποίος αρκεί για να δώσει νόημα σε όλες τις προτάσεις που θα μας απασχολήσουν.

Εντελώς αντίστοιχα ορίζουμε το σημαίνει να ανήκει μια συνάρτηση f στο χώρο $L^p(\mathbb{T})$. Μια τέτοια συνάρτηση πρέπει να είναι 2π-περιοδική και να ισχύει

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty, \quad \text{αν } 1 \le p < \infty,$$

και

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup} \, |f(x)|, \quad \text{για } p = \infty.$$

Όπως και στους συνηθισμένους χώρους $L^p(A)$ (δείτε τις σημειώσεις για το μέτρο και το ολοκλήρωμα Lebesgue) το εύρος του p είναι το διάστημα $[1, +\infty]$, αλλιώς η νόρμα $\|\cdot\|_p$ που ορίζεται παραπάνω δεν ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα και άρα δε μπορεί να χρησιμεύσει ως έννοια απόστασης ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις

$$d(f, g) = \|f - g\|_p.$$

Επίσης όμοια με τους χώρους $L^p(A)$ δεν ξεχωρίζουμε μεταξύ τους δύο συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι ίδιες σχεδόν παντού, διαφέρουν δηλ. σε ένα σύνολο E με μέτρο Lebesgue $m(E) = 0$.

3.5 Ασυμπτωτικές σχέσεις ανάμεσα σε ποσότητες και συμβολισμός

Οι συμβολισμοί $O(\cdot)$ και $o(\cdot)$ που ορίζονται παρακάτω είναι πάρα πολύ κοινοί στην Ανάλυση αλλά και στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και η χρησιμότητά τους έγκειται ότι καταφέρνουν να δηλώσουν κάτι για την «τάξη μεγέθους» μιας ακολουθίας κρύβοντας ταυτόχρονα πληροφορία που δεν ενδιαφέρει και η παρουσία της οποίας θα έκανε αυτή τη δήλωση μεγέθους δυσανάγνωστη.

Ορισμός 3.2
Αν $a_n, b_n \ge 0$ τότε γράφουμε $a_n = O(b_n)$ αν υπάρχει μια θετική σταθερά C και δείκτης n_0 ώστε να ισχύει

$$a_n \le C b_n, \quad (\forall n \ge n_0).$$

Ομοίως γράφουμε $a_n = o(b_n)$ αν η ακολουθία a_n/b_n τείνει στο 0. (Εδώ υποθέτουμε ότι η b_n τελικά δεν παίρνει την τιμή 0.)

✏ **3.18.** *1. Τι σημαίνουν: $a_n = O(1)$, $a_n = o(1)$;*

2. Δείξτε, χωρίς να υπολογίσετε το άθροισμα, ότι για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$ ισχύει

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots n^k = O(n^{k+1}).$$

3. *Δείξτε*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = O(\log n).$$

✎

Οι συμβολισμοί αυτοί έχουν νόημα ακόμη και όταν η παράμετρος δεν είναι ένας ακέραιος που τείνει στο άπειρο ($n \to \infty$ στον ορισμό 3.2) αλλά και μια πραγματική παράμετρος που συγκλίνει σε πεπερασμένο ή άπειρο όριο.

Ορισμός 3.3
Αν $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και οι συναρτήσεις $f(x) \geq 0, g(x) > 0$ είναι ορισμένες σε μια γειτονιά του x_0 τότε λέμε $f(x) = O(g(x))$ και $f(x) = o(g(x))$ για $x \to x_0$ αν συνάρτηση $f(x)/g(x)$ είναι φραγμένη σε μια γειτονιά του x_0 ή συγκλίνει στο 0 για $x \to x_0$ αντίστοιχα.

✎ **3.19.** *Δείξτε ότι $|\sin x| = O(|x|)$ για $x \to 0$ και επίσης ότι $|x| = O(|\sin x|)$ στο ίδιο όριο.* ✎

Καμιά φορά γράφουμε και $A = O(B)$ ή $A = o(B)$ και για προσημασμένες ποσότητες A, B και εννοούμε $|A| = O(|B|)$ και $|A| = o(|B|)$ αντίστοιχα.

3.6 Μέγεθος συντελεστών Fourier και ομαλότητα της συνάρτησης

Μπορούμε τώρα να δείξουμε ένα ακόμη Θεώρημα το οποίο συνδέει την ομαλότητα μιας συνάρτησης με το μέγεθος των συντελεστών Fourier της. Το πρώτο τέτοιο θεώρημα που είδαμε είναι το Θέωρημα 3.1.

Θεώρημα 3.3
Αν $f \in C^1(\mathbb{T})$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n). \tag{3.13}$$

Απόδειξη.
Η μέθοδος είναι και πάλι η ολοκλήρωση κατά μέρη. Για $n \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\left(\frac{e^{-inx}}{-in}\right)' dx \\
&= f(x)\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{in}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}\, dx \\
&= \frac{1}{in}\widehat{f'}(n)
\end{aligned}$$

αφού ο πρώτος προσθετέος μηδενίζεται λόγω της περιοδικότητας της συνάρτησης. Επίσης $\widehat{f'}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\,dx = f(2\pi) - f(0) = 0$ και πάλι λόγω της περιοδικότητας. ∎

✏ **3.20.** *Η απαίτηση στο Θεώρημα 3.3 να είναι συνεχής η παράγωγος της f είναι ισχυρότερη απ' ό,τι πραγματικά χρειάζεται. Υποθέστε ότι $f(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, για $x \in [0, 2\pi]$, για μια συνάρτηση $g \in L^1(\mathbb{T})$ με $\int g = 0$ (ώστε να είναι η f περιοδική) και δείξτε ότι*

$$\widehat{g}(n) = i \cdot n \cdot \widehat{f}(n).$$

💡 *Αντί για ολοκλήρωση κατά μέρη χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Fubini (δείτε 1.4).* ✏

Μπορούμε να εκφράσουμε το Θεώρημα 3.3 και με τη βοήθεια των κατάλληλων γραμμικών τελεστών:

$$(Df)(x) = f'(x)$$

και

$$(Ma)_n = ina_n,$$

όπου ο διαφορικός τελεστής D είναι από το χώρο $C^1(\mathbb{T})$ στο χώρο $C(\mathbb{T})$ και ο πολλαπλασιαστής M είναι από το χώρο των διπλών (δηλ. $n \in \mathbb{Z}$) ακολουθιών στόν εαυτό του. Το Θεώρημα 3.3 παίρνει πολύ απλά τη μορφή

$$\mathcal{F}D = M\mathcal{F}.$$

Πόρισμα 3.1
Αν $f \in C^j(\mathbb{T})$ τότε

$$\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n^j}\right) \quad \text{για } |n| \to \infty.$$

Απόδειξη.
Αν $f \in C^j(\mathbb{T})$ τότε έχουμε από επαναλαμβανόμενη χρήση του Θεωρήματος 3.3

$$\widehat{f^{(j)}}(n) = (in)\widehat{f^{(j-1)}}(n) = (in)^2\widehat{f^{(j-2)}}(n) = \cdots = (in)^j\widehat{f}(n),$$

άρα έχουμε για $n \neq 0$ ότι

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{i^j n^j}\widehat{f^{(j)}}(n),$$

και χρησιμοποιώντας το προφανές φράγμα

$$\left|\widehat{f^{(j)}}(n)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f^{(j)}\right|$$

παίρνουμε

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \le \frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f^{(j)}\right|}{n^j}.$$

Το ότι το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στον αριθμητή είναι πεπερασμένο είναι συνέπεια της συνέχειας της j-τάξης παραγώγου $f^{(j)}$. ∎

Άρα, αν $f \in C^2(\mathbb{T})$ έχουμε $\widehat{f}(n) = O(n^{-2})$ το οποίο συνεπάγεται

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(n)\right| < \infty.$$

Έχουμε λοιπόν, ως συνέπεια του Πορίσματος 3.1 και του Θεωρήματος 3.2 το ακόλουθο.

Πόρισμα 3.2
Αν $f \in C^2(\mathbb{T})$ τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση που έχει τους ίδιους συντελεστές Fourier με την f.

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου

[1] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Cambridge University Press, 2004.

[2] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Fourier analysis: an introduction*. Vol. 1. Princeton University Press, 2011.

[3] Antoni Zygmund. *Trigonometric series*. Cambridge University Press, 2002.

Κεφάλαιο 4

Αθροισιμότητα σειρών Fourier

Κύριες βιβλιογραφικές αναφορές για αυτό το Κεφάλαιο είναι οι Zygmund 2002, Katznelson 2004 και Stein and Shakarchi 2011.

4.1 Θεώρημα Μοναδικότητας

Μπορούν δύο διαφορετικές ολοκληρώσιμες 2π-περιοδικές συναρτήσεις να έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier; Θα δούμε ότι η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι όχι, αν και θα χρειαστεί σε αυτή τη φάση με επιβάλλουμε και κάποιες συνθήκες στις συναρτήσεις. Κατ' αρχήν είναι φανερό ότι κάποια συνθήκη πρέπει να επιβληθεί αφού μπορούμε να πάρουμε μια συνάρτηση f και να την αλλάξουμε σε ένα σημείο (ή σε ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων) πράξη η οποία δεν αλλάζει κανένα συντελεστή Fourier, αλλάζει όμως τη συνάρτηση, καταστρέφοντας τη μοναδικότητα.

Θεώρημα 4.1
[Θεώρημα Μοναδικότητας] Έστω f μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi]$, και $x_0 \in [0, 2\pi]$ σημείο συνέχειας της f. Αν όλοι οι συντελεστές Fourier της f είναι μηδέν τότε $f(x_0) = 0$.

> Θα δούμε λίγο αργότερα ότι δε χρειάζεται να υποθέσουμε συνέχεια της f σε κάποιο σημείο. Δηλαδή θα αποδείξουμε ότι αν κάποια συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{T})$ έχει όλους τους συντελεστές Fourier της ίσους με το 0 τότε η f είναι σχεδόν παντού ίση με 0.

Πριν δώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1 ας δώσουμε το σημαντικότερο πόρισμά του από το οποίο φαίνεται καθαρά γιατί το ονομάζουμε θεώρημα μοναδικότητας.

Πόρισμα 4.1
Αν $f, g \in C(\mathbb{T})$ και $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη.
Η συνάρτηση $f - g$ είναι παντού συνεχής και έχει $\widehat{f-g}(n) =$

0 για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1 μηδενίζεται παντού. ∎

Το κεντρικό ερώτημα στο οποίο η Ανάλυση Fourier οφείλει την ύπαρξή της είναι το πότε μια συνάρτηση f μπορεί να «παρασταθεί» από τη σειρά Fourier της. Το επόμενο πόρισμα των Θεωρημάτων 4.1 και 3.2 είναι το πρώτο αποτέλεσμα που βλέπουμε που λέει ότι υπό κάποιες ευρείες συνθήκες αυτό όντως ισχύει.

Πόρισμα 4.2
Αν $f \in C(\mathbb{T})$ και $\sum_n \left|\widehat{f}(n)\right| < \infty$ τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

Απόδειξη.
Από το Θεώρημα 3.2 έχουμε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση g με τους ίδιους συντελεστές Fourier με την f. Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης η g είναι επίσης συνεχής παντού και άρα, από το Πόρισμα 4.1, προκύπτει ότι $f(x) = g(x)$ παντού. ∎

Οι προϋποθέσεις του προηγούμενου Πορίσματος ισχύουν αν υποθέσουμε κάποια ομαλότητα για την f.

Πόρισμα 4.3
Αν $f \in C^2(\mathbb{T})$ τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

Απόδειξη.
Από το Πόρισμα 3.1 έχουμε $\left|\widehat{f}(n)\right| = O(1/|n|^2)$ το οποίο συνεπάγεται ότι $\sum_n \left|\widehat{f}(n)\right| < \infty$ και το αποτέλεσμα προκύπτει από το Πόρισμα 4.2. ∎

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.
Μπορούμε κατ' αρχήν να υποθέσουμε ότι $x_0 = 0$ (αυτό θα απλουστεύσει λίγο τους συμβολισμούς στην απόδειξη που ακολουθεί) αντικαθιστώντας τη συνάρτηση f με τη συνάρτηση $f(x - x_0)$ στην οποία τώρα το 0 είναι σημείο συνέχειας. Επειδή

$$\widehat{f(\cdot - x_0)}(n) = \widehat{f}(n) e^{-inx_0}$$

προκύπτει ότι και η νέα μας συνάρτηση έχει μηδενικούς συντελεστές Fourier.

Αρνούμαστε τώρα το συμπέρασμά μας και υποθέτουμε ότι $f(0) \neq 0$, και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε $f(0) > 0$. Λόγω της συνέχειας της f στο 0 προκύπτει ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq \frac{f(0)}{2}, \quad \text{για } x \in (-\delta, \delta). \tag{4.1}$$

Κάνουμε έπειτα την παρατήρηση ότι ο μηδενισμός όλων των συντελεστών Fourier συνεπάγεται το μηδενισμό του εσωτερικού γινομένου της f με οποιοδήποτε τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Πράγματι αν $p(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο τότε

$$\begin{aligned}
\langle f, p \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{p(x)} \, dx \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n} \widehat{f}(n) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ο τρόπος να καταλήξουμε σε αντίφαση είναι να βρούμε ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p(x)$ για το οποίο $\langle f, p \rangle > 0$. Για να το επιτύχουμε αυτό θα επιλέξουμε το $p(x)$ να είναι «μεγάλο» και θετικό κοντά στο 0 και «μικρό» μακριά από το 0. Ξεκινάμε κατ' αρχήν με το πολυώνυμο $\epsilon + \cos x$, όπου $\epsilon > 0$. Η συνάρτηση αυτή έχει γράφημα ίδιο με της $\cos x$ αλλά σπρωγμένο προς τα πάνω κατά ϵ. Επιλέγοντας

$$\epsilon = \frac{1 - \cos \delta}{2}$$

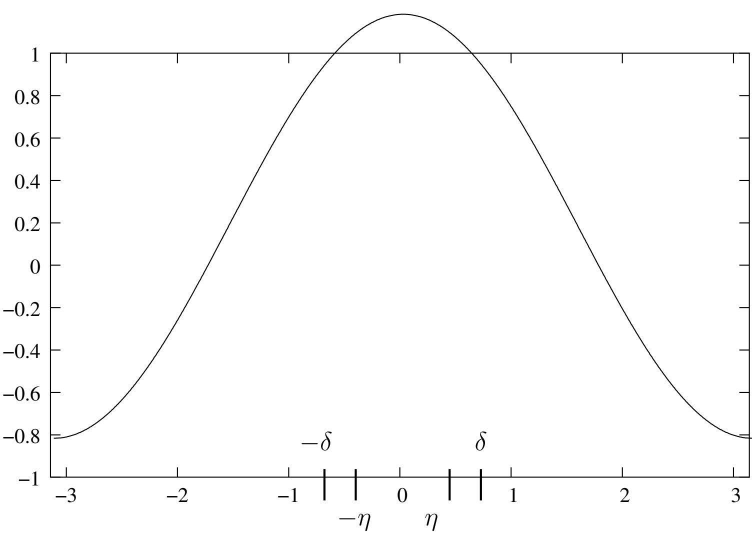
πετυχαίνουμε η συνάρτηση $q(x) = \epsilon + \cos x$ (επίσης τριγωνομετρικό πολυώνυμο) να έχει

$$\sup_{\delta \le |x| \le \pi} |q(x)| = 1 - \epsilon < 1 \tag{4.2}$$

Αφού $q(0) = 1 + \epsilon$ υπάρχει ένα $\eta \in (0, \delta)$ τ.ώ. να ισχύει

$$q(x) \ge 1, \quad \text{για } |x| \le \eta. \tag{4.3}$$

Η συνάρτηση $q(x)$ φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.

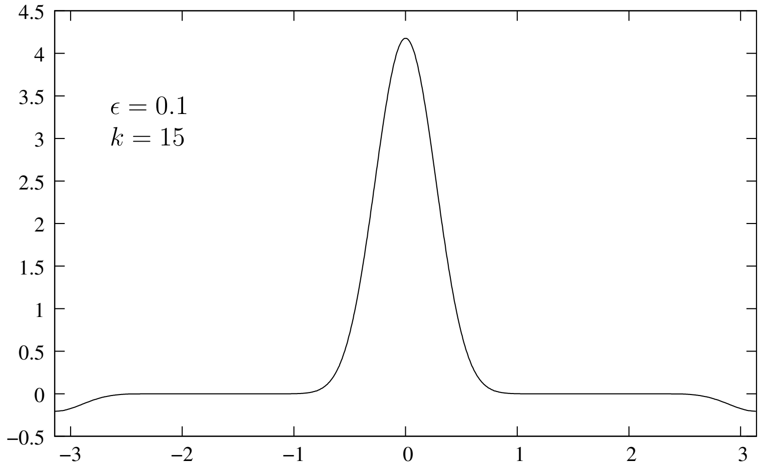


Σχήμα 4.1: Η συνάρτηση $q(x)$

Ορίζουμε τώρα το τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p(x) = (q(x))^k$ όπου k ένας μεγάλος φυσικός αριθμός που μένει ακόμη να προσδιορισθεί (αφού γινόμενο τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι επίσης τριγωνομετρικό πολυώνυμο προκύπτει ότι και το $p(x)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο). Ο λόγος που υψώσαμε το $q(x)$ σε μια μεγάλη δύναμη είναι ότι θέλουμε να το κάνουμε πολύ μικρό στα δύο διαστήματα $[-\pi, -\delta]$ και $[\delta, \pi]$, ή, με άλλα λόγια, στο σύνολο $\delta \le |x| \le \pi$. Αυτό το επιτυγχάνουμε επειδή ισχύει η (4.2):

$$|p(x)| \le (1-\epsilon)^k, \quad \text{για } \delta \le |x| \le \pi. \tag{4.4}$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το πώς μοιάζει το πολυώνυμο $p(x)$ (παράμετροι: $\epsilon = 0.1, k = 15$).



Σχήμα 4.2: Το πολυώνυμο $p(x)$

Σπάμε τώρα το εσωτερικό γινόμενο $\langle f, p\rangle = 0$ σε τρία κομμάτια:

$$0 = \langle f, p\rangle = \int_{-\eta}^{\eta} f(x)p(x)\,dx + \int_{\eta\le|x|\le\delta} f(x)p(x)\,dx + \int_{\delta\le|x|\le\pi} f(x)p(x)\,dx$$

$$= A + B + C.$$

όπου η έκφραση $\int_{\eta\le|x|\le\delta}$ είναι απλά συντομογραφία για το άθροισμα των δύο ολοκληρωμάτων $\int_{-\delta}^{-\eta}$ και $\int_{\eta}^{\delta}$.

Κάνουμε τώρα την παρατήρηση ότι λόγω της (4.1) και επειδή $p(x) \ge 0$ στο $(-\pi/2, \pi/2)$ θα έχουμε ότι $B \ge 0$. Επίσης λόγω της (4.1) και της (4.3) ισχύει

$$A \ge \int_{-\eta}^{\eta} f(x)\,dx \ge \frac{f(0)}{2} 2\eta = \eta f(0).$$

Τέλος, λόγω της (4.4) έχουμε

$$|C| = \left| \int_{\delta\le|x|\le\pi} f(x)p(x)\,dx \right|$$

$$\leq (1-\epsilon)^k \int\limits_{\delta\leq|x|\leq\pi} |f(x)|\,dx$$

$$\leq (1-\epsilon)^k \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx.$$

Αφού $(1-\epsilon)^k \to 0$ για $k\to\infty$, και επειδή η ποσότητα $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx$ είναι πεπερασμένη (ολοκληρωσιμότητα της f) έπεται ότι μπορούμε να επιλέξουμε το k τόσο μεγάλο ώστε να έχουμε $|C| \leq \frac{1}{2}\eta f(0)$. Βάζοντας τις εκτιμήσεις αυτές για τα A, B, C μαζί παίρνουμε την επιθυμητή αντίφαση

$$0 = A + B + C \geq \eta f(0) + 0 + (-\frac{1}{2}\eta f(0)) = \frac{1}{2}\eta f(0) > 0.$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.1 είναι πλήρης. ∎

4.2 Συνέλιξη στην ευθεία

Ας είναι $R > 0$ και $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις που είναι 0 έξω από το διάστημα $[-R, R]$. Σε αυτή την περίπτωση η συνέλιξη των δύο συναρτήσεων

$$f * g(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy \tag{4.5}$$

είναι χωρίς αμφιβολία καλώς ορισμένη αφού ο ολοκληρωτέος $f(y)g(x-y)$ είναι, για κάθε σταθερό x, μια συνεχής συνάρτηση του y που μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[-R, R]$, και άρα το ολοκλήρωμα στον ορισμό (4.5) είναι το ίδιο με το $\int_{-R}^{R} f(y)g(x-y)\,dy$.

Εύκολα βλέπουμε σε αυτή την περίπτωση ότι η συνάρτηση $f * g(x)$ μηδενίζεται για $|x| > 2R$ αφού σε αυτή την περίπτωση δεν γίνεται ταυτόχρονα να έχουμε $y \in [-R, R]$ και $x - y \in [-R, R]$, και άρα ο ολοκληρωτέος μηδενίζεται ταυτοτικά.

Με την αλλαγή μεταβλητής $u = x - y$ στο ολοκλήρωμα (4.5) βλέπουμε ότι η συνέλιξη είναι αντιμεταθετική πράξη

$$f * g(x) = g * f(x).$$

Η συνέχεια των f και g που ζητήσαμε εδώ να έχουμε είναι κάπως περιοριστική. Μήπως θα μπορούσαν οι f και g να είναι απλώς ολοκληρώσιμες; Το απλό παράδειγμα των ολοκληρωσίμων συναρτήσεων

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x = 0 \text{ ή } |x| \geq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{για } 0 < |x| < 1 \end{cases}$$

μας δείχνει ότι τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά αφού ο υπολογισμός του $f * g(0)$ καταλήγει στο ολοκλήρωμα της $1/|x|$ στο $(-1, 1)$ το οποίο είναι $+\infty$.

✏ **4.1.** *Δείξτε παρ' όλα αυτά ότι, για τις συναρτήσεις f και g που ορίσαμε παραπάνω ότι, η ποσότητα $f*g(x)$ είναι καλώς ορισμένη (η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη) για κάθε $x \neq 0$.* ✏

Αν θέλουμε το ολοκλήρωμα στην (4.5) πάντα να συγκλίνει μια φυσιολογική συνθήκη για τις f και g είναι να έχουμε την μια από αυτές ολοκληρώσιμη και την άλλη φραγμένη. Αν για παράδειγμα η f είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ (δεν υποθέτουμε ότι μηδενίζεται έξω από κάποιο διάστημα) και $|g(x)| \le M < \infty$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε εύκολα βλέπουμε ότι η $f*g$ ορίζεται παντού και είναι μια φραγμένη συνάρτηση

$$|f*g(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy \right|$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)g(x-y)|\,dy$$

$$\le M \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\,dy$$

και το δεξί μέλος της ανισότητας είναι μια πεπερασμένη σταθερά αφού η f έχει υποτεθεί ολοκληρώσιμη.

Αν όμως είμαστε διατεθειμένοι να αποδεχτούμε η συνάρτηση $f*g$ να ορίζεται σχεδόν παντού τότε αρκεί $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.

Θεώρημα 4.2
Αν $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ τότε σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $F(x,y) = f(y)g(x-y)$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς y, άρα η συνάρτηση $f*g(x)$ ορίζεται σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Απόδειξη.
Έχουμε

$$\int\int |F(x,y)|\,dy\,dx = \int\int |f(y)||g(x-y)|\,dx\,dy$$

$$= \int |f(y)| \int |g(x-y)|\,dx\,dy$$

$$= \int |f(y)|\,dy \int |g(x)|\,dx$$

$$= \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Για την εναλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα του Fubini (δείτε τις σημειώσεις για το ολοκλήρωμα Lebesgue).

Άρα η ποσότητα $\int F(x,y)\,dy$ είναι πεπερασμένη σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπως θέλαμε να αποδείξουμε. ∎

4.3 Συνέλιξη στον κύκλο

Αν f, g είναι 2π-περιοδικές συναρτήσεις η συνέλιξή τους ορίζεται διαφορετικά από τον τύπο (4.5) ο οποίος δε θα έκανε νόημα σε αυτή την περίπτωση μια και οι 2π-περιοδικές συναρτήσεις δεν είναι ολοκληρώσιμες πάνω σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ (εκτός από τη μηδενική συνάρτηση). Ορίζουμε λοιπόν

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)g(x-y)\,dy. \tag{4.6}$$

Τι συνθήκες πρέπει να βάλουμε για τις f και g ώστε να κάνει νόημα το ολοκλήρωμα; Η εύκολη λύση κι εδώ είναι να απαιτήσουμε να είναι κι οι δύο συνεχείς, αλλά αυτό είναι περιοριστικό. Μια λύση κι εδώ είναι να ζητάμε η μια από αυτές να είναι ολοκληρώσιμη και η άλλη φραγμένη (άρα και ολοκληρώσιμη αφού μιλάμε για φραγμένο διάστημα ολοκλήρωσης).

Όπως και στην περίπτωση συνέλιξης συναρτήσεων ορισμένων πάνω σε όλο το $\mathbb{R}$ κι εδώ ορίζουμε τη συνέλιξη δύο οποιωνδήποτε συναρτήσεων στο $L^1(\mathbb{T})$ φτάνει να είμαστε διατεθειμένοι να αποδεχτούμε ότι η συνάρτησή μας ορίζεται απλά σχεδόν παντού, όχι παντού.

Σε αντίθεση με τη συνέλιξη στο $\mathbb{R}$, όπου οι συνθήκες για μια συνάρτηση να είναι στο $L^\infty(\mathbb{R})$ ή στο $L^1(\mathbb{R})$ δεν είναι μεταξύ τους συγκρίσιμες (δε συνεπάγεται η μια την άλλη), στην περίπτωση του κύκλου η συνθήκη το να είναι μια συνάρτηση στο $L^1(\mathbb{T})$ είναι η ευρύτερη δυνατή.

Θεώρημα 4.3
Για τη συνέλιξη $f * g$ δύο συναρτήσεων $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ ισχύουν τα ακόλουθα.

1. *Η συνέλιξη $f * g(x)$ ορίζεται σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έχουμε*
$$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1. \tag{4.7}$$

2. *Αν επιπλέον $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ τότε η συνέλιξη $f * g(x)$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι ουσιωδώς φραγμένη ολοκληρώσιμη συνάρτηση και ισχύει*
$$\|f * g\|_\infty \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty. \tag{4.8}$$
Επίσης η συνάρτηση $f * g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

3. *(Αντιμεταθετικότητα) Ισχύει $f * g(x) = g * f(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f * g$ είναι επίσης 2π-περιοδική αν την ορίσουμε κατάλληλα σε ένα σύνολο μέτρου 0.*

4. *(Γραμμικότητα) Η συνέλιξη είναι γραμμική και ως προς τα δύο ορίσματά της. Ισχύει δηλαδή, αν $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$*
$$f * (\lambda g + \mu h) = \lambda f * g + \mu f * h,$$
και ομοίως για γραμμικό συνδυασμό ως προς το πρώτο όρισμα, οποτεδήποτε ορίζεται καλώς το δεξί μέλος.

5. *(Προσεταιριστικότητα) Αν* $f, g, h \in L^1(\mathbb{T})$ *τότε*

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Απόδειξη.

Απόδειξη του 4.3.1. Όπως στο Θεώρημα 4.2.
Απόδειξη του 4.3.2.

$$|f * g(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) g(x-y)\, dy \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(y)||g(x-y)|\, dy$$

$$\leq \|g\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(y)|\, dy$$

$$= \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

Για να δείξουμε τη συνέχεια της f παρατηρούμε ότι

$$|f * g(x+h) - f * g(x)| = |(\tau_h f - f) * g(x)| \leq \|\tau_h f - f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Τέλος θυμόμαστε ότι ο τελεστής τ_h της μεταφοράς κατά h είναι συνεχής σε όλους τους χώρους L^p, και άρα η ποσότητα $\|\tau_h f - f\|_1$ μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε αρκεί το h να είναι αρκετά μικρό. Εφ' όσον δεν υπάρχει εξάρτηση από το x η συνέχεια είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$.
Απόδειξη του 4.3.3. Για την αντιμεταθετικότητα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $u = x - y$ στο ολοκλήρωμα (4.6) και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αν μια συνάρτηση είναι 2π-περιοδική τότε το ολοκλήρωμά της πάνω σε κάθε διάστημα μήκους 2π είναι το ίδιο. Η 2π-περιοδικότητα της $f * g$ είναι άμεση συνέπεια της περιοδικότητας της g (και ισχύει και στην περίπτωση της συνέλιξης στην ευθεία όταν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ και η g είναι 2π-περιοδική).
Απόδειξη του 4.3.4. Αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη.
Απόδειξη του 4.3.5.

$$(f * g) * h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f * g(y) h(x-y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(y-t)\, dt\, h(x-y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(y-t) h(x-y)\, dy\, dt$$

(εναλλαγή σειράς ολοκλήρωσης)

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(u)h(x-t-u)\,du\,dt$$

(αλλαγή μεταβλητής $u = y - t$)

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) g * h(x-t)\,dt$$

$$= f * (g * h)(x).$$

Για να αιτιολογήσουμε την εναλλαγή σειράς ολοκλήρωσης παραπάνω αρκεί να δείξουμε (θ. Fubini) ότι το πολλαπλό ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)||g(y-t)|\,dt|h(x-y)|\,dy$$

είναι πεπερασμένο. Αυτό είναι συνέπεια διπλής εφαρμογής της ανισότητας (4.7).

∎

Δίνουμε ακόμη χωρίς απόδειξη την παρακάτω πολύ χρήσιμη ανισότητα.

Θεώρημα 4.4 (Ανισότητα Young)
Αν $p, q, r \in [1, +\infty]$ ικανοποιούν τη σχέση

$$\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

τότε ισχύει

$$\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q. \tag{4.9}$$

Παρατήρηση 4.1
Σε ένα θεώρημα όπως το Θεώρημα 4.4 που για κάποια συνάρτηση δίνεται ότι κάποια νόρμα της είναι πεπερασμένη (η r-νόρμα της $f * g$ στην περίπτωση της ανισότητας Young) συνέπεια του Θεωρήματος (που συχνά δε δηλώνεται ρητά) είναι ότι η συνάρτηση αυτή ανήκει στον αντίστοιχο χώρο (στην περίπτωση της ανισότητα Young έπεται λοιπόν ότι η $f * g$ ανήκει στο χώρο $L^r(\mathbb{T})$ όταν $f \in L^p(\mathbb{T})$ και $g \in L^q(\mathbb{T})$.

Παρατηρήστε ότι οι περιπτώσεις 1 και 2 του Θεωρήματος 4.3 είναι ειδικές περιπτώσεις της ανισότητας του Young για $p = q = r = 1$ και $p = 1, q = \infty, r = \infty$.

Αξίζει επίσης να σημειώσουμε το εξής πόρισμα της ανισότητας του Young για $r = p$, $q = 1$.

Πόρισμα 4.4
Αν $1 \le p \le \infty$ και $f \in L^p(\mathbb{T})$, $g \in L^1(\mathbb{T})$ τότε ισχύει

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1. \tag{4.10}$$

Η ισχυρή σχέση που έχει η έννοια της συνέλιξης με την Ανάλυση Fourier οφείλεται στην επόμενη πολύ σημαντική πρόταση η οποία μας λέει ότι η πράξη της συνέλιξης στο πεδίο του «χρόνου» μεταφράζεται σε κατά σημείο πολλαπλασιασμό στο πεδίο «Fourier» ή στο πεδίο συχνοτήτων.

Θεώρημα 4.5
Αν $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ *τότε*

$$\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n) \cdot \widehat{g}(n) \tag{4.11}$$

Απόδειξη.
Έχουμε

$$\widehat{f * g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f * g(x) e^{-inx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) g(x-y)\, dy\, e^{-inx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-iny} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-y) e^{-in(x-y)}\, dx\, dy$$

(αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-iny}\, dy \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int}\, dt$$

(αλλαγή μεταβλητής $t = x - y$)

$$= \widehat{f}(n) \widehat{g}(n).$$

Η αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης αιτιολογείται από το θ. Fubini αφού το αντίστοιχο ολοκλήρωμα όπου οι συναρτήσεις έχουν αντικατασταθεί από το μέτρο τους συγκλίνει. ∎

4.2. *Αν* $f \in L^1(\mathbb{T})$, $g \in C(\mathbb{T})$ *δείξτε ότι* $f * g \in C(\mathbb{T})$.
Γράψτε το $f*g(x_0) - f*g(x_0+h)$ *σαν ένα ολοκλήρωμα και χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης για να δείξετε ότι πάει στο 0 για* $h \to 0$.

4.3. *Αν* $f \in L^1(\mathbb{T})$, $g \in C^1(\mathbb{T})$ *δείξτε ότι* $f * g \in C^1(\mathbb{T})$ *και ότι*

$$(f * g)' = f * g'. \tag{4.12}$$

Εκφράστε τη διαφορά $f * g'(x_0) - \frac{1}{h}(f * g(x_0+h) - f * g(x_0))$ *σαν ένα ολοκλήρωμα και χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης για να δείξετε ότι πάει στο 0 για* $h \to 0$.

✏ **4.4.** *Δείξτε ότι το συμπέρασμα του Προβλήματος 4.2 ισχύει ακόμη και αν υποθέσουμε μόνο ότι* $g \in L^\infty(\mathbb{T})$.

💡 *Χρησιμοποιήστε το ότι η μεταφορά είναι συνεχής στο* $L^1(\mathbb{T})$, *ότι δηλ. αν* $F \in L^1(\mathbb{T})$ *ισχύει*

$$\|F(\cdot - h) - F(\cdot)\|_1 \to 0, \quad \text{για } h \to 0.$$

✏

✏ **4.5.** *Δείξτε ότι αν* f *είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο και* $g \in L^1(\mathbb{T})$ *τότε η συνέλιξη* $f * g$ *είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού* $\le \deg f$. ✏

4.4 Ο πυρήνας του Dirichlet και τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier

Κεντρικό αντικείμενο για τη μελέτη της κατά σημείο σύγκλισης

$$S_N(f)(x) \to f(x)$$

είναι ο λεγόμενος πυρήνας του Dirichlet τάξης N, το τριγωνομετρικό πολυώνυμο δηλ. που ορίζεται ως

$$D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}. \tag{4.13}$$

Δεν είναι δύσκολο να βρει κανείς ένα κλειστό τύπο για το $D_N(x)$:

$$D_N(x) = \frac{\sin{(N+\frac{1}{2})x}}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{4.14}$$

Για να δείξουμε την (4.14) χρησιμοποιούμε τον τύπο για το άθροισμα της πεπερασμένης γεωμετρικής σειράς

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, \quad (z \ne 1), \tag{4.15}$$

(με e^{ix} στη θέση του z) και τον τύπο για τη διαφορά συνημιτόνων

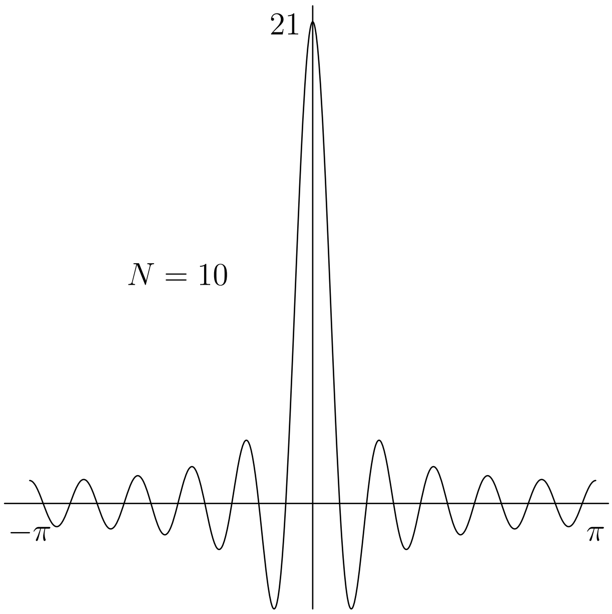
$$\cos A - \cos B = 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}. \tag{4.16}$$

✏ **4.6.** *Αποδείξτε τις (4.15) και (4.16).* ✏

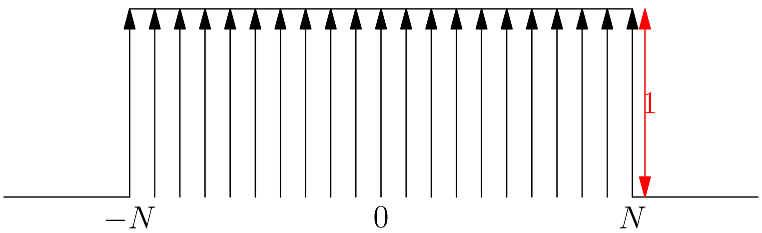
✏ **4.7.** *Κάντε τις πράξεις μόνοι σας για εξάσκηση και αποδείξτε την (4.14). Θυμηθείτε ότι μια εν γένει καλή στρατηγική όταν έχετε ένα κλάσμα με μιγαδικό παρανομαστή είναι να πολλαπλασιάζετε αριθμητή και παρανομαστή με το συζυγή του παρανομαστή ώστε να γίνεται πραγματικός ο παρανομαστής.* ✏

Ποια είναι όμως η σχέση του πυρήνα του Dirichlet με τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f; Η απάντηση είναι εύκολη αν παρατηρήσουμε ότι οι δύο συναρτήσεις

$$S_N(f)(x) \quad \text{και} \quad f * D_N(x)$$



Σχήμα 4.3: Ο πυρήνας του Dirichlet για $N = 10$



Σχήμα 4.4: Οι συντελεστές Fourier του πυρήνα του Dirichlet $D_N(x)$ για $N = 10$

έχουν ίδιους συντελεστές Fourier.

Πραγματικά, όσον αφορά την $S_N(f)(x)$, η συνάρτηση αυτή είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού N με συντελεστές Fourier ίδιους με τους συντελεστές Fourier της f μέχρι και τάξης N, και οι υπόλοιποι συντελεστές Fourier μηδενίζονται.

Όσον αφορά τη συνάρτηση $f * D_N$ έπεται από το Πρόβλημα 4.5 ότι και αυτή είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού $\leq N$ και από το Θεώρημα 4.5 έπεται ότι έχει τους ίδιους συντελεστές Fourier με την $S_N(f)(x)$.

Αφού και οι δύο αυτές συναρτήσεις είναι παντού συνεχείς (η πρώτη ως τριγωνομετρικό πολυώνυμο και η δεύτερη λόγω του Προβλήματος 4.2) έπεται ότι είναι παντού ίδιες από το Θεώρημα Μοναδικότητας για συνεχείς συναρτήσεις (Θεώρημα 4.1).

Από την ταυτότητα

$$S_N(f)(x) = f * D_N(x)$$

βλέπουμε ότι η μελέτη των μερικών αθροισμάτων μιας σειράς Fourier είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη μελέτη του πυρήνα Dirichlet και ειδικότερα με το μέγεθος του πυρήνα για μεγάλες τιμές του N.

4.5 Μέσοι όροι των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier

Όταν μελετάμε το κεντρικό ερώτημα της ανάλυσης Fourier που είναι το κατά πόσο, με ποιο τρόπο και υπό ποιες συνθήκες τα μερικά αθροίσματα μιας σειράς Fourier συγκλίνουν στη συνάρτηση, συχνά συναντάμε αρνητικές απαντήσεις.

Ένα πολύ βασικό αποτέλεσμα, για παράδειγμα, είναι ότι υπάρχουν συναρτήσεις $f \in C(\mathbb{T})$ που η σειρά Fourier τους δε συγκλίνει στη συνάρτηση παντού. Προς το παρόν δε θα περιγράψουμε τέτοια παραδείγματα αλλά θα επισημάνουμε ότι το φαινόμενο αυτό συνδέεται με το ότι οι ποσότητες

$$\|D_N\|_1$$

δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένες για όλα τα N (εδώ D_N είναι ο πυρήνας Dirichlet (4.13) τάξης N).

4.8. *Αποδείξτε ότι υπάρχει μια θετική σταθερά C (δεν έχει ιδιαίτερη σημασία ποια είναι) τ.ώ.*

$$\|D_N\|_1 \ge C \log N. \tag{4.17}$$

Σχεδιάστε πρώτα το γράφημα της D_N χρησιμοποιώντας τον τύπο (4.14). Δε χρειάζεται να είστε πολύ ακριβείς στο γράφημά σας, ούτε να βρείτε την καλύτερη σταθερά C στην (4.17).

Αν επιτρέψουμε $f \in L^1(\mathbb{T})$ τότε υπάρχουν παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων f των οποίων η σειρά Fourier δε συγκλίνει πουθενά (οφείλονται στον Kolmogorov).

Από την θετική πλευρά υπάρχει το θεώρημα του L. Carleson που λέει ότι για κάθε $f \in L^2(\mathbb{T})$ (άρα και για κάθε συνεχή συνάρτηση) η σειρά Fourier της f συγκλίνει στην f σχεδόν παντού. Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος (1966) θεωρήθηκε μια από τις μεγάλες επιτυχίες της ανάλυσης Fourier (απαντούσε σε μια εικασία του Lusin) και είναι πολύ δύσκολη για να παρουσιαστεί σε αυτές τις σημειώσεις.

Θυμίζουμε εδώ ότι έχουμε τους ακόλουθους εγκλεισμούς για τους συνηθισμένους χώρους συναρτήσεων πάνω στον κύκλο:

$$\cdots \subseteq C^j(\mathbb{T}) \subseteq C^{j-1}(\mathbb{T}) \subseteq \cdots \subseteq C^0(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T}) \tag{4.18}$$

$$\subseteq L^\infty(\mathbb{T}) \subseteq \cdots \subseteq L^2(\mathbb{T}) \subseteq \cdots \subseteq L^1(\mathbb{T}).$$

4.6 Μέσοι όροι αριθμητικής ακολουθίας

Για να παρακάμψουμε τα πολλά εμπόδια που υπάρχουν στη σύγκλιση των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier μελετάμε τους μέσους όρους τους.

Θεώρημα 4.6
Έστω $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, και

$$\sigma_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Αν $a_n \to a \in \mathbb{C}$ *τότε και* $\sigma_n \to a$*. Αν όμως* σ_n *συγκλίνει δεν έπεται ότι και η* a_n *συγκλίνει.*

Απόδειξη.
Εύκολα βλέπει κανείς ότι μπορεί να υποθέσει $a = 0$. Έστω $\epsilon > 0$ και n_0 τ.ώ. αν $n \ge n_0$ να ισχύει $|a_n| < \epsilon$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{a_1 + \cdots + a_{n_0}}{n} + \frac{a_{n_0+1} + \cdots + a_n}{n} \\ &= \frac{a_1 + \cdots + a_{n_0}}{n} + \frac{n-n_0}{n}\frac{a_{n_0+1} + \cdots + a_n}{n-n_0} \\ &= I + II.\end{aligned}$$

Η ποσότητα I παραπάνω τείνει στο 0 (ο αριθμητής είναι σταθερός) για $n \to \infty$ ενώ για την ποσότητα II έχουμε

$$|II| \le \left|\frac{a_{n_0+1} + \cdots + a_n}{n-n_0}\right|.$$

Όμως η ποσότητα στην απόλυτο τιμή στο δεξί μέλος είναι ο μέσος όρος των αριθμών $a_{n_0+1}, \ldots, a_n$ που όλοι βρίσκονται μέσα στον δίσκο $\{|z| \le \epsilon\}$. Επειδή το χωρίο αυτό είναι κυρτό και ο μέσος όρος τους θα είναι μέσα στο δίσκο αυτό, άρα $|II| \le \epsilon$. Έχουμε λοιπόν δείξει ότι $\limsup_{n\to\infty} |\sigma_n| \le \epsilon$, κι αφού το ϵ είναι οτιδήποτε έχουμε δείξει $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

Για να δούμε ότι η σύγκλιση της ακολουθίας σ_n δε συνεπάγεται τη σύγκλιση της a_n αρκεί να κοιτάξουμε το παράδειγμα της ακολουθίας $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ για την οποία οι μέσοι όροι συγκλίνουν στο $1/2$ ενώ η ίδια η ακολουθία δε συγκλίνει. ∎

✏ **4.9.** *Κατασκευάστε μια ακολουθία* $a_n \ge 0$ *που οι μέσοι όροι της συγκλίνουν στο* 0 *αλλά η ίδια η ακολουθία να έχει το* ∞ *ως* $\limsup$ *της.* ✏

4.7 Cesáro μέσοι όροι της σειράς Fourier και το θεώρημα του Fejér

Το Θεώρημα 4.6, εφαρμοσμένο στην ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier μιας συνάρτησης,

$$S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{ikx},$$

μας λέει ότι αν το όριο

$$\alpha = \lim_{N\to\infty} S_N(f)(x)$$

υπάρχει για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχει και το όριο των μέσων όρων των $S_N f(x)$

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f)(x) \tag{4.19}$$

και είναι πάλι το α.

✏ **4.10.** *Δείξτε ότι*

$$\sigma_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \widehat{f}(k) e^{ikx}. \tag{4.20}$$

✏

Ενδέχεται όμως να υπάρχει το όριο των μέσων (4.19) (λέγονται συνήθως Cesáro μέσοι της f στο x) χωρίς να υπάρχει το όριο των $S_N(f)(x)$ και αυτό ακριβώς είναι που καθιστά τους Cesáro μέσους ένα χρήσιμο υποκατάστατο των μερικών αθροισμάτων. Στην περίπτωση που ισχύει

$$\alpha = \lim_{N\to\infty} \sigma_N(f)(x)$$

λέμε ότι η σειρά Fourier της f στο σημείο x είναι Cesáro αθροίσιμη στο α. Εν γένει περιμένουμε η φυσιολογική συμπεριφορά να είναι $\alpha = f(x)$. Η πρώτη περίπτωση που αυτό συμβαίνει είναι ακριβώς όταν $f \in C(\mathbb{T})$ και αυτό είναι το περιεχόμενο κλασικού θεωρήματος του Fejér.

Θεώρημα 4.7 (Fejér)
Αν $f \in C(\mathbb{T})$ τότε $\sigma_n(f)(x) \to f(x)$ ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$. Με άλλα λόγια

$$\|\sigma_n(f) - f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{4.21}$$

Το Θεώρημα του Fejér μας δίνει μια νέα απόδειξη του θεωρήματος της Μοναδικότητας 4.1 για συνεχείς συναρτήσεις.

Πόρισμα 4.5
(Μοναδικότητα) Αν $f, g \in C(\mathbb{T})$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη του Πορίσματος 4.5.
Αφού οι δύο συναρτήσεις έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier οι ποσότητες $\sigma_n(f)(x)$ και $\sigma_n(g)(x)$ θα ταυτίζονται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού αυτές ορίζονται μέσω των συντελεστών Fourier της κάθε συνάρτησης. Αφού $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)(x)$ και $g(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(g)(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έπεται ότι $f(x) = g(x)$. ∎

Πόρισμα 4.6 (Μοναδικότητα στο $L^1(\mathbb{T})$)
Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\widehat{f}(n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ τότε $f = 0$ σχεδόν παντού.

Απόδειξη.
Από το μηδενισμό στο άπειρο (Λήμμα Riemann-Lebesgue) των συντελεστών Fourier προκύπτει ότι $\sigma_n(f) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα, από το Πόρισμα 4.8 παρακάτω για $p = 1$, προκύπτει ότι $f = 0$ σ.π. ∎

Ένα άλλο πολύ χρήσιμο πόρισμα του Θεωρήματος του Fejér 4.7 είναι το ακόλουθο ανάλογο του θεωρήματος του Weierstrass (ότι τα αλγεβρικά πολυώνυμα προσεγγίζουν ομοιόμορφα κάθε συνεχή συνάρτηση σε κλειστό και φραγμένο διάστημα).

Πόρισμα 4.7
Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στο χώρο $C(\mathbb{T})$ με την ομοιόμορφη (L^∞) μετρική.

Απόδειξη του Πορίσματος 4.7.
Αν $f \in C(\mathbb{T})$ τότε οι συναρτήσεις $\sigma_n(f)(x)$ είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα και προσεγγίζουν ομοιόμορφα την f. ∎

4.11. *Αν $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων p_n τ.ώ. $\|p_n - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \to 0$.*

Χρησιμοποιήστε το Πόρισμα 4.7 και το γεγονός ότι οι συνεχείς συναρτήσεις είναι πυκνές στους χώρους $L^p(\mathbb{T})$ με τις αντίστοιχες μετρικές.

N 4.1. *Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $N \in \mathbb{N}$ βρείτε τους συντελεστές Fourier της συνάρτησης $f(Nx)$ μέσω αυτών της $f(x)$.*

Μπορείτε να το κάνετε χρησιμοποιώντας απευθείας τον ορισμό. Μπορείτε επίσης να το κάνετε πρώτα για τριγωνομετρικά πολυώνυμα (όπου είναι πολύ εύκολο, αφού οι συντελεστές Fourier ενός τριγωνομετρικού πολυωνύμου είναι απλά οι συντελεστές του) και να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $L^1(\mathbb{T})$.

N 4.2. *Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(nt)\, dt = \widehat{f}(0)\widehat{g}(0).$$

Δείξτε το πρώτα για f τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Μετά χρησιμοποιήστε την πυκνότητα των τριγωνομετρικών πολυωνύμων στο $L^1(\mathbb{T})$. Η Άσκηση N4.1 θα σας είναι χρήσιμη.

4.8 Απόδειξη του θεωρήματος του Fejér

Σε αναλογία με τη σχέση $S_N(f)(x) = f * D_N(x)$ για τα μερικά αθροίσματα μπορούμε να γράψουμε $\sigma_N(f)(x) = f * K_N(x)$, όπου K_N είναι ο *πυρήνας του Fejér*. Από τη σχέση (4.19) προκύπτει άμεσα ότι

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} D_n(x)$$

και άρα, μετά από λίγες πράξεις,

$$K_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) e^{ikx}. \tag{4.22}$$

Αυτή η σχέση προκύπτει άμεσα από τη σχέση 4.20 και το γεγονός ότι οι συντελεστές Fourier μιας συνέλιξης είναι το γινόμενο των συντελεστών Fourier των δύο συνελικτικών παραγόντων (Θεώρημα 4.5).

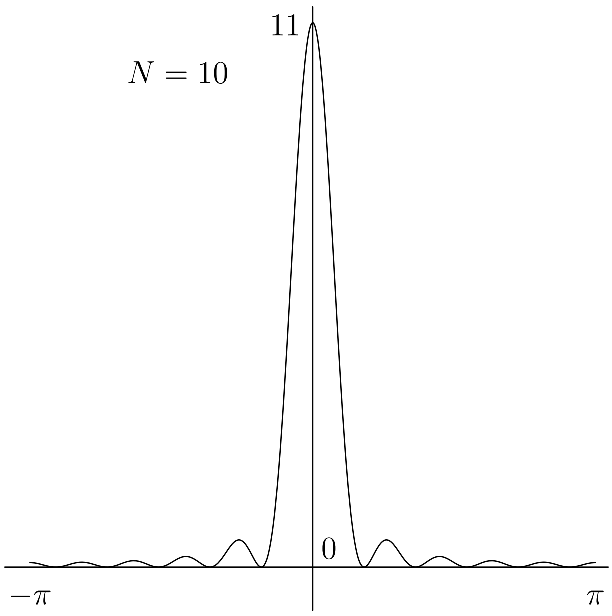
4.12. *Δείξτε ότι* New!

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1}\frac{\sin^2\frac{(N+1)x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}. \tag{4.23}$$

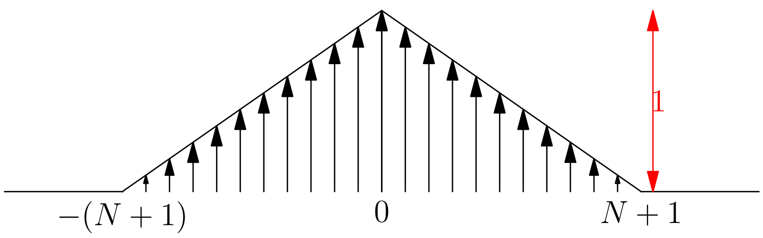
New! *Χρησιμοποιήστε τον τύπο* (4.14) *και το ότι*

$$K_N = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n.$$

Εκφράστε το γινόμενο $\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)\sin\frac{x}{2}$ *που θα εμφανιστεί ως διαφορά συνημιτόνων και απλοποιήστε το άθροισμα.*



Σχήμα 4.5: Ο πυρήνας του Fejér για $N = 10$



Σχήμα 4.6: Οι συντελεστές Fourier του πυρήνα του Fejér $K_N(x)$ για $N = 10$

Είναι πολύ σημαντικό ότι, όπως φαίνεται από την (4.23), ο πυρήνας του Fejér είναι μη αρνητική συνάρτηση, της οποίας το ολοκλήρωμα είναι

$$\|K_N\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_N = \widehat{K_N}(0) = 1.$$

Ο πυρήνας του Fejér είναι ειδική περίπτωση αυτο που ονομάζουμε *καλό πυρήνα*.

Ορισμός 4.1
Μια ακολουθία συναρτήσεων $k_n \in L^1(\mathbb{T}), n \in \mathbb{N}$, ονομάζεται καλός πυρήνας αν

1. *$\int k_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*
2. *Υπάρχει πεπερασμένη σταθερά M τ.ώ. $\|k_n\|_1 \le M$, για $n \in \mathbb{N}$, και*
3. *Για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi \ge |x| > \epsilon} |k_n(x)|\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{-\epsilon} + \int\limits_{\epsilon}^{\pi}\right)|k_n| \to 0.$$

Έχουμε ήδη δει ότι ο πυρήνας του Fejér ικανοποιεί τις δύο πρώτες ιδιότητες. Για να δείξουμε και την ιδιότητα 4.1.3 παρατηρούμε ότι ο τύπος (4.23) συνεπάγεται την ανισότητα

$$K_N(x) \le \frac{1}{N\sin^2(x/2)}.$$

4.13. *Συμπληρώστε την απόδειξη ότι ο πυρήνας $K_N(x)$ ικανοποιεί την 4.1.3.*

Το Θεώρημα του Fejér έπεται τώρα από το ακόλουθο γενικότερο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.8
Αν k_n είναι ένας καλός πυρήνας και $f \in C(\mathbb{T})$ τότε $f * k_n \to f$ ομοιόμορφα.

Απόδειξη.
Πρέπει να δείξουμε ότι $|f * k_n(x) - f(x)| \to 0$ ομοιόμορφα ως προς x.

Έστω $\epsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της f έπεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ τ.ώ. αν $|y| \le \delta$ τότε να ισχύει

$$|f(x-y) - f(x)| \le \epsilon. \tag{4.24}$$

Γράφουμε

$$|f * k_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-y)k_n(y)\,dy - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)k_n(y)\,dy\right|$$

(αφού $\int k_n = 1$)

$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)||k_n(y)|\,dy$$

(τριγωνική ανισότητα)

$$= \int\limits_{|y|\le\delta} + \int\limits_{\pi\ge|y|>\delta}$$

$$= I + II.$$

Από την (4.24) έχουμε

$$I = \int_{|y|\le\delta} |f(x-y) - f(x)||k_n(y)|\,dy$$

$$\le \epsilon \int_{|y|\le\delta} |k_n(y)|\,dy$$

$$\le \epsilon \int_{-\pi}^{\pi} |k_n|$$

$$\le M\epsilon, \quad \text{όπου } M \text{ τέτοιο ώστε } \|k_n\|_1 \le M \text{ για κάθε } n.$$

Χρησιμοποιούμε τώρα την ιδιότητα 4.1.3 που ισχύει για την k_n και παίρνουμε

$$= \int_{\pi\ge|y|>\delta} |f(x-y) - f(x)||k_n(y)|\,dy$$

$$\le \int_{\pi\ge|y|>\delta} |f(x-y)||k_n(y)|\,dy + \int_{\pi\ge|y|>\delta} |f(x)||k_n(y)|\,dy$$

$$\le 2\|f\|_\infty \int_{\pi\ge|y|>\delta} |k_n(y)|\,dy$$

$$\to 0.$$

Έπεται ότι για n αρκετά μεγάλο έχουμε $I + II \le (M+1)\epsilon$. ∎

Πόρισμα 4.8 (Fejér στους L^p)
Αν $1 \le p < \infty$ και $f \in L^p(\mathbb{T})$ τότε $\|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0$ για $n \to \infty$.

Απόδειξη.
(Η περίπτωση $p = \infty$ που λείπει από το Πόρισμα 4.8 είναι το Θεώρημα 4.7 αλλά μόνο όταν $f \in C(\mathbb{T})$. Δεν αρκεί $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ μια και προφανώς δε μπορεί μια ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων, ή άλλων συνεχών συναρτήσεων, να συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια ασυνεχή συνάρτηση.)

Έστω $p < \infty$, $\epsilon > 0$ και $g \in C(\mathbb{T})$ τ.ώ. $\|f - g\|_p \le \epsilon$. Αυτό είναι εφικτό λόγω της πυκνότητας των συνεχών συναρτήσεων στους χώρους $L^p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$.

Έχουμε

$$\|\sigma_n(f) - f\|_p = \|\sigma_n(f) - \sigma_n(g) + \sigma_n(g) - g + g - f\|_p$$

$$\le \|\sigma_n(f-g)\|_p + \|\sigma_n(g) - g\|_p + \|g - f\|_p$$

$$\le \|f-g\|_p\|K_n\|_1 + \|\sigma_n(g) - g\|_\infty + \|g - f\|_p$$

(από (4.10))

$$\leq \epsilon + \|\sigma_n(g) - g\|_\infty + \epsilon.$$

Από το Θεώρημα 4.7 έπεται ότι για n αρκετά μεγάλο ισχύει

$$\|\sigma_n(f) - f\|_p \leq 3\epsilon.$$

∎

4.9 Εφαρμογή: Το θεώρημα ισοκατανομής του Weyl

Ορισμός 4.2
Έστω $x \in \mathbb{R}$. Το ακέραιο μέρος του x ορίζεται ως εξής:

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : \ n \leq x\}.$$

Το κλασματικό μέρος του x είναι η ποσότητα

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$

Γράφουμε επίσης $x \bmod 1 = \{x\}$.

Προφανώς ισχύει $\{x\} \in [0, 1)$.

Ορισμός 4.3
Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $0 \leq x_n \leq 1$, $n = 1, 2, \ldots$, λέγεται ισοκατανεμημένη αν για κάθε αριθμούς a, b με $0 \leq a \leq b \leq 1$ ισχύει

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|\{n : \ 1 \leq n \leq N \ \& \ x_n \in [a, b]\}|}{N} = b - a.$$

Αν $x_n \in \mathbb{R}$ λέμε ότι η x_n είναι ισοκατανεμημένη mod 1 αν η ακολουθία των κλασματικών μερών $\{x_n\}$ είναι ισοκατανεμημένη.

Το νόημα του προηγούμενου ορισμού είναι ότι μια ακολουθία είναι ισοκατανεμημένη στο διάστημα $[0, 1]$ αν το πλήθος των όρων της που πέφτουν μέσα σε ένα διάστημα $[a, b]$, αν κοιτάξουμε ένα μεγάλο αρχικό κομμάτι της ακολουθίας, είναι περίπου ανάλογο του μήκους του διαστήματος $b - a$.

✏ **4.14.** *Δείξτε ότι η ακολουθία*

$$0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$$

είναι ισοκατανεμημένη. ✏

✏ **4.15.** *Περιγράψτε μια ακολουθία $x_n \in [0, 1]$ που να είναι πυκνή στο $[0, 1]$ αλλά να μην είναι ισοκατανεμημένη.* ✏

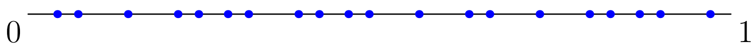
Σκοπός μας εδώ είναι αποδείξουμε το ακόλουθο πολύ σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 4.9 (Weyl)
Αν α άρρητος τότε η ακολουθία

$$n\alpha, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

είναι ισοκατανεμημένη mod 1.

Στο παρακάτω σχήμα μπορείτε να δείτε τα κλασματικά μέρη $\{i\sqrt{2}\}, \ = 1, 2, \ldots, 20$.



Το θεώρημα 4.9 θα το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας εργαλεία αρμονικής ανάλυσης. Υπάρχει και στοιχειώδης τρόπος να αποδειχτεί αλλά (α) αυτός δεν είναι σε καμία περίπτωση πιο εύκολος και (β) δεν έχει τις δυνατότητες επέκτασης που έχει η μέθοδος που θα δούμε. Το θεώρημα 4.9 είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4.10.

Θεώρημα 4.10 (Κριτήριο ισοκατανομής του Weyl)
Έστω $x_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Η x_n είναι ισοκατανεμημένη mod 1.

(β) Για κάθε συνεχή και 1-περιοδική συνάρτηση f ισχύει

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \to \int_0^1 f(x)\,dx. \tag{4.25}$$

(γ) Για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ισχύει

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{i2\pi k x_n} \to 0. \tag{4.26}$$

4.16. *Δείξτε ότι το Θεώρημα 4.9 έπεται από το Θεώρημα 4.10.*
Επαληθεύστε την ιδιότητα (γ) του Θεωρήματος 4.10 για την ακολουθία $n\alpha$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

4.17. *Δείξτε ότι η ακολουθία $n\alpha$, $n = 1, 2, \ldots$, δεν είναι ισοκατανεμημένη mod 1 αν $\alpha \in \mathbb{Q}$.*

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.10.

(α) $\Rightarrow$ (β)

Παρτηρούμε ότι η ιδιότητα της ισοκατανομής mod 1 μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi_{[a,b]}(\{x_n\}), \quad (\text{για } 0 \le a \le b \le 1).$$

Αυτό συνεπάγεται ότι η (4.25) ισχύει για κάθε συνάρτηση f που γράφεται ως πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών κλειστών διαστημάτων, δηλ. για κάθε τμηματικά σταθερή συνάρτηση ορισμένη στο $[0, 1]$. Όμως οι τμηματικά σταθερές συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα πυκνές στις συνεχείς συναρτήσεις στο $[0, 1]$ και εύκολα προκύπτει ότι η ιδιότητα (4.25) μεταβιβάζεται και στα ομοιόμορφα όρια συναρτήσεων για τις οποίες ισχύει.

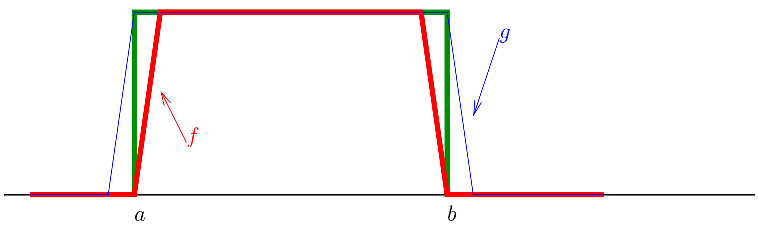
4.18. *Αποδείξτε με λεπτομέρεια τον ισχυρισμό της προηγούμενης παραγράφου, ότι δηλ. η (4.25) ισχύει για όλες τις συνεχείς συναρτήσεις επειδή ισχύει για ένα υποσύνολο αυτών που είναι ομοιόμορφα πυκνό.*

(β) ⇒ (α)

Έστω $[a,b] \subseteq (0,1)$ και $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό. Προσεγγίζουμε από πάνω και από κάτω τη συνάρτηση $\chi_{[a,b]}$ (που δεν είναι συνεχής)

$$f \le \chi_{[a,b]} \le g$$

από τις συνεχείς (τραπεζοειδείς) συναρτήσεις f και g όπως φαίνονται στο παρακάτω Σχήμα.



Η συνάρτηση f είναι ίση με 0 εκτός του $[a,b]$, είναι ίση με 1 στο διάστημα $[a+\epsilon, b-\epsilon]$ και είναι γραμμική και συνεχής στα δύο διαστήματα $[a, a+\epsilon]$ και $[b-\epsilon, b]$. Ομοίως η g είναι ίση με 1 εντός του $[a,b]$, είναι ίση με 0 εκτός του διαστήματος $[a-\epsilon, b+\epsilon]$ και είναι γραμμική και συνεχής στα δύο διαστήματα $[a-\epsilon, a]$ και $[b, b+\epsilon]$.

Εφαρμόζουμε την (4.25) για τις συνεχείς συναρτήσεις f και g και παίρνουμε ως συνέπεια ότι το liminf και το limsup της ποσότητας

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi_{[a,b]}(\{x_n\})$$

είναι ανάμεσα στις τιμές $\int f$ και $\int g$ οι οποίες, για $\epsilon \to 0$, συγκλίνουν στο $\int \chi_{[a,b]}$.

(β) ⇒ (γ)

Προφανές.

(γ) ⇒ (β)

Εδώ χρησιμοποιούμε το γεγονός (συνέπεια του Θεωρήματος του Fejér 4.7) ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα προσεγγίζουν ομοιόμορφα όλες τις συνεχείς και περιοδικές συναρτήσεις. Για να είμαστε λίγο πιο ακριβείς, το Θεώρημα 4.7 αναφέρεται σε 2π-περιοδικές συναρτήσεις και στα τριγωνομετρικά πολυώνυμα που είναι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί των συναρτήσεων e^{inx}, $n \in \mathbb{Z}$, ενώ εδώ αναφερόμαστε σε 1-περιοδικές συναρτήσεις και σε τριγωνομετρικά πολυώνυμα που είναι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί των συναρτήσεων $e^{2\pi inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, αλλά είναι σχεδόν προφανές ότι το θεώρημα ισχύει και στην 1-περιοδική περίπτωση.

Αφού λοιπόν η (4.25) ισχύει για όλες τις μη σταθερές εκθετικές συναρτήσεις (αφού $\int e^{2\pi ikx}\,dx = 0$ για $k \ne 0$) και αφού προφανώς ισχύει και για τις σταθερές, έπεται ότι η (4.25) ισχύει για όλα τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα και, κατ' επέκταση σε όλες τις 1-περιοδικές συνεχείς συναρτήσεις, λόγω της πυκνότητας, στην ομοιόμορφη μετρική, των τριγωνομετρικών πολυωνύμων σε αυτές. ∎

✏ **4.19.** *Έστω $a \neq 0$ ένας πραγματικός αριθμός και $0 < \rho < 1$. Δείξτε ότι η ακολουθία $\{an^\rho\}$ είναι ισοκατανεμημένη.*

Χρησιμοποιήστε το κριτήριο ισοκατανομήστου Weyl (Θεώρημα 4.10). Εκτιμήστε το άθροισμα που εμφανίζεται από το αντίστοιχο ολοκλήρωμα και δείξτε ότι το σφάλμα είναι $O(N^\rho)$. ✏

4.10 Εφαρμογή: Μια συνεχής συνάρτηση, πουθενά παραγωγίσιμη

Είναι πολύ εύκολο να φτιάξει κανείς μια συνάρτηση που δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη: η χαρακτηριστική συνάρτηση των ρητών $\chi_{\mathbb{Q}}$ είναι μια τέτοια συνάρτηση. Όμως η συνάρτηση αυτή δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη για ένα κάπως τετριμμένο (όχι ενδιαφέροντα δηλ.) λόγο: δεν είναι πουθενά συνεχής, αφού το άνω όριο σε κάθε σημείο είναι 1 και το κάτω είναι 0. Είναι πολύ πιο ενδιαφέρον να έχουμε παντού συνέχεια της συνάρτησης και πουθενά παραγωγισιμότητα, και σε αυτή την παράγραφο θα δούμε ένα παράδειγμα, που λίγο-πολύ οφείλεται στον Weierstrass, τέτοιας συνάρτησης χρησιμοποιώντας τεχνικές της αρμονικής ανάλυσης.

Θεώρημα 4.11
Έστω $0 < \alpha < 1$. Τότε η σειρά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\alpha n} e^{i 2^n x} \tag{4.27}$$

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$ που δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη.

Η ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς είναι φανερή αφού

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\alpha n} < \infty$$

αφού $\alpha > 0$. Πριν αποδείξουμε τη μη παραγωγισιμότητα ας δοκιμάσουμε να παραγωγίσουμε τη σειρά όρο προς όρο. Προκύπτει η σειρά

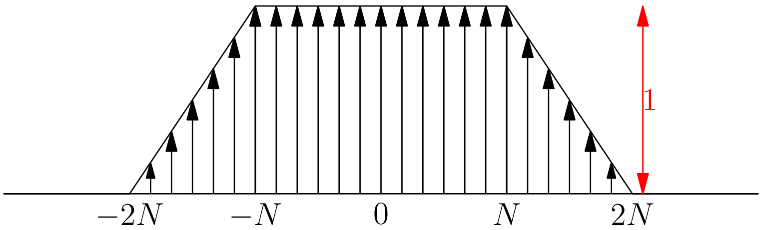
$$\sum_{n=0}^{\infty} i 2^{(1-\alpha)n} e^{i 2^n x}. \tag{4.28}$$

Παρατηρήστε ότι, λόγω της υπόθεσης $\alpha < 1$, οι συντελεστές των συναρτήσεων $e^{i2^n x}$ πάνε στο άπειρο, άρα η σειρά (4.28) δε συγκλίνει για κανένα $x \in \mathbb{R}$. Αυτός ο υπολογισμός δεν αποδεικνύει φυσικά το θεώρημα (αφού θα μπορούσε να υπάρχει η παράγωγος αλλά να μην είναι ίδια με την (4.28)) αλλά αποτελεί μια ισχυρή ένδειξη ότι το Θεώρημα 4.11 είναι σωστό.

Ορίζουμε πρώτα το λεγόμενο πυρήνα του de la Vallée Poussin ο οποίος ορίζεται μέσω του πυρήνα του Fejér ως εξής: New!

$$V_N(x) = 2K_{2N-1}(x) - K_{N-1}(x). \tag{4.29}$$

Οι συντελεστές Fourier του $V_N(x)$ φαίνονται στο Σχήμα 4.7. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $\widehat{V_N}(k) = 1$ για $|k| \le N$, $\widehat{V_N}(k) = 0$ για $|k| \ge 2N$ και ότι η $\widehat{V_N}(k)$ πέφτει γραμμικά ως προς k για $|k| = N, N+1, \ldots, 2N$, από την τιμή 1 στην τιμή 0.



Σχήμα 4.7: Οι συντελεστές Fourier του πυρήνα του de la Vallée Poussin $V_N(x)$ για $N = 6$

4.20. *Δείξτε ότι* $\|V_N\|_1 \le 3$.

4.21. *Τελείως ανάλογα με τα μερικά αθροίσματα μιας σειράς Fourier* $S_N(f)(x) = f * D_N(x)$ *και τους Cesáro μέσους της σειράς* $\sigma_N(f)(x) = f * K_N(x)$ *ορίζονται και οι de la Vallée Poussin μέσοι*

$$\tau_N(f)(x) = f * V_N(x) = 2\sigma_{2N-1}(f)(x) - \sigma_{N-1}(f)(x). \tag{4.30}$$

Δείξτε ότι και για τους de la Vallée Poussin μέσους ισχύει το θεώρημα του Fejér: αν $f \in C(\mathbb{T})$ *τότε* $\tau_N(f)(x) \to f(x)$ *ομοιόμορφα.*

Το ότι οι συντελεστές Fourier της V_N είναι ίσοι με 1 μέχρι το N και φθίνουν γραμμικά μέχρι το $2N$ κάνει τους de la Vallée Poussin μέσους $\tau_N(f)(x)$ να μοιάζουν αφενός με τα μερικά αθροίσματα $S_N(f)(x)$ αλλά να έχουν και κάποιες από τις καλές ιδιότητες των Cesáro μέσων $\sigma_N(f)(x)$.

4.22. *Έστω* $f \in C(\mathbb{T})$ *τέτοια ώστε* $\widehat{f}(n) = 0$ *αν ο ακέραιος* n *δεν είναι της μορφής* $\pm 3^k$ $(k \in \mathbb{N})$*. Δείξτε ότι για μια τέτοια* f *η ακολουθία* $S_N(f)(x)$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στην* f.

Εκφράστε το $S_N(f)(x)$ *ως ένα μέσο de la Vallée Poussin της* f *και χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 4.21.*

Λήμμα 4.1
Αν $g \in C(\mathbb{T})$ *είναι παραγωγίσιμη στο* x_0 *τότε*

$$\sigma_N(g)'(x_0) = O(\log N), \quad \tau_N(g)'(x_0) = O(\log N), \quad \text{για } N \to \infty. \tag{4.31}$$

Απόδειξη.
Παραγωγίζοντας την ταυτότητα $\tau_N(g) = 2\sigma_{2N-1}(g) - \sigma_{N-1}(g)$

βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε την πρώτη από τις δύο εκτιμήσεις.

Εφαρμόζοντας το Πρόβλημα 4.3 βλέπουμε ότι

$$\sigma_N(g)'(x_0) = (K_N*g)'(x_0) = K_N'*g(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_N'(t)g(x_0-t)\,dt.$$

Αφού $\int_0^{2\pi} K_N' = 0$ έχουμε επίσης

$$\sigma_N(g)'(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_N'(t)\left[g(x_0-t) - g(x_0)\right]\,dt.$$

Η παραγωγισιμότητα στο x_0 μας δίνει ότι υπάρχει πεπερασμένη σταθερά $C > 0$ τ.ώ.

$$|g((x_0-t) - g(x_0)| \le C|t|, \quad (t \in \mathbb{R}),$$

και συνεπώς

$$\left|\sigma_N(g)'(x_0)\right| \le C\int_0^{2\pi} \left|K_N'(t)\right||t|\,dt. \tag{4.32}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (4.23), που μετά από παραγώγιση μας δίνει

$$K_N'(t) = \frac{\sin\frac{(N+1)t}{2}\cos\frac{(N+1)T}{2}}{\sin^2(t/2)} - \frac{1}{N+1}\frac{\cos\frac{t}{2}\sin^2\frac{(N+1)t}{2}}{\sin^3(t/2)}, \tag{4.33}$$

καθώς και το γεγονός ότι το K_N είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού N με συντελεστές φραγμένους από 1, παίρνουμε την ανισότητα

$$\left|K_N'(t)\right| \le A\min\left\{N^2, \frac{1}{t^2}\right\}, \tag{4.34}$$

για $|t| \le \pi$ και για κάποια πεπερασμένη σταθερά A.

✏ **4.23.** *Αποδείξτε με όλη τη λεπτομέρεια την ανισότητα (4.34) και βρείτε μια τιμή για τη σταθερά A ώστε η ανισότητα αυτή να ισχύει για κάθε αρκετά μεγάλο N.* ✏

Από την (4.32) και την (4.34) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left|\sigma_N(g)'(x_0)\right| &\le C\int_{\pi\ge|t|\ge(1/N)} \left|K_N'(t)\right||t|\,dt + \int_{|t|\le(1/N)} \left|K_N'(t)\right||t|\,dt \\ &\le CA\int_{\pi\ge|t|\ge(1/N)} \frac{1}{|t|}\,dt + CAN\int_{|t|\le(1/N)} dt \\ &= O(\log N),\end{aligned}$$

το οποίο συμπληρώνει την απόδειξη του Λήμματος. ∎

4.24. *Αποδείξτε ότι* $\tau_{2^n}(f)(x) - \tau_{2^{n-1}}(f)(x) = 2^{-\alpha n} e^{i 2^n x}$ *για κάθε* x *και άρα, παραγωγίζοντας,* New!

$$\left|\tau_{2^n}(f)'(x) - \tau_{2^{n-1}}(f)'(x)\right| = 2^{(1-\alpha)n}. \tag{4.35}$$

Χρησιμοποιήστε το Σχήμα 4.7.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το $f'(x_0)$ υπάρχει, για τη συνάρτηση (4.27). Χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 4.24 παίρνουμε αντίφαση ανάμεσα στην (4.35) και στο συμπέρασμα του Λήμματος 4.1, για $g = f$ και $N = 2^n, 2^{n-1}$, αφού με βάση το Λήμμα 4.1 η ποσότητα (4.35) είναι $O(\log N)$ ενώ από το Πρόβλημα 4.24 είναι ίση με $N^{1-\alpha}$, που δεν είναι $O(\log N)$. Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.11 είναι πλήρης.

4.11 Το Θεώρημα του Weierstrass

4.11.1 Γενικά

Το πολύ σημαντικό θεώρημα του Weierstrass στο οποίο αναφερθήκαμε όταν αποδείξαμε το αντίστοιχο για τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι το παρακάτω.

Θεώρημα 4.12 (Weierstrass)
Αν $a < b$ *είναι πραγματικοί αριθμοί και η* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *είναι συνεχής τότε υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων που συγκλίνει ομοιόμορφα στην* f *στο διάστημα* $[a, b]$.

Παρατήρηση 4.2
Ένας διαφορετικός τρόπος να πουμε το ίδιο πράγμα είναι να πούμε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων p_n *τ.ώ.* $\|p_n - f\|_\infty \to 0$, *όπου η* $\|\cdot\|_\infty$ *είναι αναφορικά με το διάστημα* $[a, b]$, *ισχύει δηλαδή*

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |g(x)|.$$

Τη δεύτερη αυτή διατύπωση μπορούμε και να την πάρουμε ως τον ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης.

Ορισμός 4.4
Αν $f, f_n : K \to \mathbb{C}$ *είναι συναρτήσεις ορισμένες πάνω σε ένα σύνολο* K *λέμε ότι η ακολουθία* f_n *συγκλίνει στην* f *ομοιόμορφα στο* K *αν*

$$\|f - f_n\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x) - f_n(x)| \to 0, \quad (n \to \infty).$$

Παρατήρηση 4.3
Υπάρχει λόγος που στο Θεώρημα του Weierstrass περιοριζόμαστε σε συνεχείς συναρτήσεις, δηλ. το ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων διατηρεί τη συνέχεια των συγκλινουσών συναρτήσεων στο όριο.

Παρατήρηση 4.4
Έχει σημασία ότι το πεδίο ορισμού της f *είναι ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα. Εύκολα μπορούμε να βρούμε συνεχείς συναρτήσεις πάνω σε φραγμένα ανοιχτά διαστήματα*

ή άφρακτα διαστήματα που δε μπορούν να προσεγγισθούν ομοιόμορφα στο πεδίο ορισμού τους. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f_1(x) = e^x$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής παντού αλλά για κάθε πολυώνυμο $p(x)$ ισχύει φυσικά

$$|f_1(x) - p(x)| \to +\infty, \quad (x \to +\infty),$$

αφού η εκθετική συνάρτηση αυξάνει πιο γρήγορα από οποιαδήποτε πολυωνυμική συνάρτηση. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f_2(x) = 1/x$, με πεδίο ορισμού το $(0, 1)$. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της αλλά δεν μπορεί να προσεγγισθεί ομοιόμορφα από πολυώνυμο, μια και οποιοδήποτε πολυώνυμο $q(x)$ έχει

$$\lim_{x\to 0+} q(x) = q(0),$$

ενώ για την $f_2(x)$ το από δεξιά όριο στο 0 είναι $+\infty$.

4.11.2 Η απόδειξη του Landau

Η πρώτη απόδειξη του θεωρήματος του Weierstrass που θα δούμε οφείλεται στον Landau.

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ συνεχής.

Περιορισμός στο διάστημα $[0, 1]$**.**

Κάνουμε κατ' αρχήν την παρατήρηση ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $[a, b]$ είναι όποιο συγκεκριμένο διάστημα μας βολεύει, για παράδειγμα το $[0, 1]$. Ο λόγος γι' αυτό είναι ότι μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τα σημεία $t \in [0, 1]$ με τα στοιχεία $x \in [a, b]$ με μια *αφφινική απεικόνιση* (μια απεικόνιση δηλ. που είναι της μορφής $x \to Ax + B$), την

$$x = a + t(b - a) \ \text{ της οποίας η αντίστροφη είναι η } \ t = \frac{x - a}{b - a}.$$

Αν τώρα $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής τότε και η συνάρτηση

$$g(t) = f(a + t(b - a))$$

είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[0, 1]$. Αν υπάρχει πολυώνυμο $p(t)$ τ.ώ. $|p(t) - g(t)| \le \epsilon$ για $t \in [0, 1]$ τότε η συνάρτηση

$$q(x) = p((x - a)/(b - a))$$

είναι κι αυτή πολυώνυμο και ισχύει φυσικά

$$|q(x) - f(x)| = |p(t) - g(t)| \le \epsilon.$$

Από δω και πέρα λοιπόν υποθέτουμε ότι $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής.

Η f μηδενίζεται στα άκρα του διαστήματος.

Μπορούμε επίσης χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $f(0) = f(1) = 0$. Αυτό συμβαίνει γιατί μπορούμε να αφαιρέσουμε από την f ένα κατάλληλο πρωτοβάθμιο πολυώνυμο ώστε να πετύχουμε αυτή τη συνθήκη. Ακριβέστερα, αν η $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ είναι οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση τότε θέτουμε

$$g(x) = f(x) - \ell(x), \quad \text{όπου} \quad \ell(x) = f(0) + x(f(1) - f(0)),$$

και παρατηρούμε ότι (α) η g είναι συνεχής συνάρτηση που μηδενίζεται στα άκρα του διαστήματος και (β) αν μπορούμε να προσεγγίσουμε την g με ένα πολυώνυμο p

$$\|g(x) - p(x)\|_\infty \le \epsilon$$

τότε το πολυώνυμο $q(x) = p(x) + \ell(x)$ επίσης προσεγγίζει την $f(x)$

$$\|f(x) - q(x)\|_\infty = \|g(x) + \ell(x) - (p(x) + \ell(x))\|_\infty \le \epsilon.$$

Από δω και πέρα λοιπόν υποθέτουμε ότι η συνάρτησή μας, $f(x)$, μηδενίζεται στα άκρα του διαστήματος. Για ευκολία μας την επεκτείνουμε (με μηδενικές τιμές) στο υπόλοιπο της πραγματικής ευθείας, και η νέα μας συνάρτηση είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ μια και τα μόνα σημεία στα οποία γεννάται αμφιβολία γι' αυτό είναι τα άκρα του $[0,1]$, όμως εκεί τα πλευρικά όρια της f είναι και τα δύο 0.

Τα πολυώνυμα προσέγγισης

Ορίζουμε τώρα (θυμόμαστε ότι η f μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[0,1]$)

$$L_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) K_n(t)\, dt = \int_{-x}^{1-x} f(x+t) K_n(t)\, dt,$$

όπου

$$K_n(t) = \begin{cases} c_n(1-t^2)^n, & |t| \le 1 \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$$

και η σταθερά c_n επιλέγεται με τρόπο τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t)\, dt = 1.$$

Για να δούμε ότι οι συναρτήσεις $L_n(x)$ είναι όντως πολυώνυμα του x αν $x \in [0,1]$[1] κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $u = x + t$ και παίρνουμε έτσι την έκφραση

$$L_n(x) = \int_0^1 f(u)(1-(u-x)^2)^n\, du,$$

[1] Εύκολα βλέπει κανείς ότι οι συναρτήσεις $L_n(x)$ έχουν φραγμένο φορέα άρα δεν μπορούν να είναι πολυώνυμα σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Ταυτίζονται όμως με κάποιο πολυώνυμο στο διάστημα $[0,1]$ που μας ενδιαφέρει.

η οποία εύκολα φαίνεται ότι είναι πολυώνυμο του x, μια και η συνάρτηση $(1-(u-x)^2)^n$ είναι πολυώνυμο του x με συντελεστές που εξαρτώνται από το u

$$(1-(u-x)^2)^n = \sum_{j=0}^{2n} q_j(u)x^j$$

και άρα

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{2n} \left(\int_0^1 f(u)q_j(u)\,du \right) x^j.$$

Προσέγγιση της μονάδας

Η συνάρτηση K_n (για την ακρίβεια, η ακολουθία συναρτήσεων K_n) είναι αυτό που ονομάζεται *προσέγγιση της μονάδας*, έχει δηλ. τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Η $K_n(x)$ είναι κατά τμήματα συνεχής (αρκεί να υποθέσουμε ότι είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα),
2. $K_n(x) \ge 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
3. $\int_{-\infty}^{\infty} K_n(x)\,dx = 1$,
4. Για κάθε $\delta > 0$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} \int_{|t|>\delta} K_n(t)\,dt = 0$.

(Το ολοκλήρωμα $\int_{|t|>\delta}$ είναι συντομογραφία του αθροίσματος $\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty}$.) Η πιο καίρια ιδιότητα μιας προσέγγισης της μονάδας είναι η ιδιότητα 4 παραπάνω. Το νόημα αυτής της ιδιότητας είναι ότι, αφού τα ολοκληρώματα των K_n δεν αλλάζουν με το n και αφού το ολοκλήρωμα της K_n εκτός του διαστήματος $(-\delta, \delta)$ τείνει στο 0, τότε όλη η «μάζα» κάτω από το γράφημα του K_n μαζεύεται όλα και κοντύτερα στο 0 όσο το n μεγαλώνει.

4.25. *Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $K_n(x)$ έχει την ιδιότητα 4 παραπάνω.*

Θα χρειαστείτε ένα κάτω φράγμα για το $\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το παρακάτω που προκύπτει αν κόψετε το χωρίο ολοκλήρωσης και εφαρμόσετε την ανισότητα του Bernoulli ($(1+x)^n \ge 1+nx$, για $x \ge -1$):

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt \ge \int_{-1/\sqrt{n}}^{1/\sqrt{n}} 1 - nt^2\,dt.$$

Το ότι η ακολουθία K_n είναι προσέγγιση της μονάδας έχει ως συνέπεια το ακόλουθο.

Θεώρημα 4.13
Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής και φραγμένη. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)K_n(t)\,dt \to f(x). \tag{4.36}$$

Εάν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η σύγκλιση στην (4.36) δεν είναι απλά σύγκλιση κατά σημείο αλλά είναι και ομοιόμορφη σύγκλιση σε όλο το $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Γράφουμε $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)K_n(t)\,dt$ (αφού $\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t)\,dt = 1$) και έτσι, αν $\delta > 0$ είναι οποιοδήποτε,

$$\begin{aligned}\left|f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)K_n(t)\,dt\right| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} (f(x+t) - f(x))K_n(t)\,dt\right| \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|K_n(t)\,dt \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)|K_n(t)\,dt + \\ &\quad \int_{|t|>\delta} |f(x+t) - f(x)|K_n(t)\,dt \\ &= I + II.\end{aligned}$$

Έστω $\epsilon > 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι, για αρκετά μεγάλο n, έχουμε $I < \epsilon$ και $II < \epsilon$.

Για τον πρώτο όρο έχουμε λόγω της συνέχειας της f στο x ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|f(x+t) - f(x)| < \epsilon,$$

για $|t| \le \delta$. Αν η συνάρτηση είναι απλά συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε το δ αυτό εξαρτάται από το ϵ και το x ενώ αν η συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε εξαρτάται μόνο από το ϵ. Έχουμε λοιπόν

$$I \le \int_{-\delta}^{\delta} \epsilon K_n(t)\,dt \le \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t)\,dt = \epsilon.$$

Για το δεύτερο όρο θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα 4 της προσέγγισης της μονάδας. Έχουμε

$$II \le \int_{|t|>\delta} 2\|f\|_\infty K_n(t)\,dt = 2\|f\|_\infty \int_{|t|>\delta} K_n(t)\,dt \to 0,$$

και άρα, για αρκετά μεγάλο n, έχουμε επίσης $II < \epsilon$. Στην παραπάνω ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την τριγωνική ανισότητα για να φράξουμε την ποσότητα $|f(x+t) - f(x)| \le |f(x+t)| + |f(t)| \le 2\|f\|_\infty$, και η ποσότητα

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty$$

από την υπόθεσή μας ότι η f είναι φραγμένη.

Στην εκτίμηση του II ο δείκτης n_0 πέρα από τον οποίο ισχύει $II < \epsilon$ δεν εξαρτάται από το x αλλά μόνο από το ϵ και το δ είτε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής είτε όχι (αφού το μόνο που χρησιμοποιούμε από την f είναι ότι είναι φραγμένη).

Όμως η επιλογή του δ έγινε όταν φράξαμε το I και εκεί το δ εξαρτάται από το x, εκτός αν η συνάρτηση f υποτεθεί ομοιόμορφα συνεχής οπότε το δ εξαρτάται μόνο από το ϵ. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ταυτόχρονα $I + II < \epsilon$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα η σύγκλιση

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)K_n(t)\,dt \to f(x)$$

είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος του Weierstrass (Θεώρημα 4.12) είναι πλήρης.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.13 παίρνουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση των πολυωνύμων L_n στην f στο διάστημα $[0, 1]$.

4.26. *Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι ομοιόμορφα (στο $\mathbb{R}$) όρια πολυωνύμων.*

Ένα πολυώνυμο $p(x)$ που είναι φραγμένο στο $\mathbb{R}$ είναι αναγκαστικά σταθερά.

4.11.3 Η απόδειξη του Bernstein

Η δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος του Weierstrass (Θεώρημα 4.12) που θα δούμε οφείλεται στον Bernstein και είναι πολύ ενδιαφέρουσα γιατί συνδέει τη θεωρία Πιθανοτήτων με την πολυωνυμική προσέγγιση που θέλουμε να πετύχουμε. Επίσης τα πολυώνυμα που δίνει ως προσέγγιση της f είναι πολύ απλό να περιγραφούν.

Τα πολυώνυμα του Bernstein και η πιθανοθεωρητική τους ερμηνεία

Υποθέτουμε και πάλι ότι η $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής (δε χρειάζεται αυτή τη φορά να κανονικοποιήσουμε την f ώστε να μηδενίζεται στα άκρα του διαστήματος). Ορίζουμε τα *πολυώνυμα Bernstein της f* να είναι η ακολουθία πολυωνύμων $B_n(f)$ που δίδεται από

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \qquad (4.37)$$

Θα δείξουμε ότι τα $B_n(f)(x) \to f(x)$ ομοιόμορφα στο διάστημα $[0, 1]$.

Για την απόδειξη θα χρειαστεί να ερμηνεύσουμε τα πολυώνυμα του Bernstein σε πιθανοθεωρητική γλώσσα.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα νόμισμα το οποίο φέρνει κορώνα με πιθανότητα $x \in [0, 1]$ και το ρίχνουμε n φορές. Η τυχαία μεταβλητή $B_{x,n}$ μετράει το πόσες κορώνες φέραμε σε αυτό το πείραμα. Προφανώς ισχύει πάντα $0 \le B_{x,n} \le n$ και εύκολα βλέπει κανείς ότι η $B_{x,n}$ ακολουθεί τη λεγόμενη *διωνυμική κατανομή*, έχουμε δηλαδή για $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathbf{Pr}\left[B_{x,n} = k\right] = \begin{cases} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} & \text{αν } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Ο λόγος για τον παραπάνω τύπο είναι ότι το να φέρουμε ακριβώς k κορώνες στο πείραμα μπορεί να συμβεί με ακριβώς $\binom{n}{k}$ τρόπους (επιλέγουμε από τις n ρίψεις σε ποιες k θα έρθουν οι κορώνες) και κάθε ένας από αυτούς τους τρόπους έχει πιθανότητα $x^k(1-x)^{n-k}$ να συμβεί.

Κάνουμε επίσης την παρατήρηση ότι, αν γράψουμε I_j για την *δείκτρια* τυχαία μεταβλητή που είναι 1 αν φέρουμε κορώνα στην j ρίψη και 0 αν φέρουμε γράμματα στην j ρίψη, ισχύει

$$B_{x,n} = I_1 + I_2 + \cdots + I_n.$$

Έχουμε $\mathbf{E}[I_j] = x$ και $\mathbf{Var}[I_j] = x(1-x)$ με ένα απλό υπολογισμό οπότε συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbf{E}[B_{x,n}] = \mathbf{E}[I_1] + \cdots + \mathbf{E}[I_n] = nx$$

και από το γεγονός ότι οι I_j είναι ανεξάρτητες προκύπτει επίσης ότι

$$\sigma^2(B_{x,n}) = \mathbf{Var}[B_{x,n}] = \mathbf{Var}[I_1] + \cdots + \mathbf{Var}[I_n] = nx(1-x) \le n. \tag{4.38}$$

Τέλος, θα χρειαστούμε και την ανισότητα του Chebyshev που δίνει ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα να αποκλίνει μια τυχαία μεταβλητή από τη μέση τιμή της.

Θεώρημα 4.14 (Chebyshev)
Αν $X \in \mathbb{Z}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή με

$$\mathbf{E}\left[|X|^2\right] < \infty,$$

και αν $\mu = \mathbf{E}[X]$ και $\sigma = \sqrt{\mathbf{Var}[X]}$ τότε

$$\mathbf{Pr}[|X-\mu| \ge \lambda\sigma] \le \frac{1}{\lambda^2}, \tag{4.39}$$

για κάθε $\lambda > 0$.

✏ **4.27.** *Θα χρειαστούμε επίσης αργότερα και την ανισότητα $\mathbf{E}[|X|] \le \mathbf{E}\left[|X|^2\right]^{1/2}$ για μια διακριτή τυχαία μεταβλητή $X \in \mathbb{Z}$. Αποδείξτε αυτή την ανισότητα.*

💡 *Οι δύο ποσότητες που μας ενδιαφέρουν είναι οι*

$$\mathbf{E}[|X|] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| \mathbf{Pr}[X=k]$$

και

$$\mathbf{E}\left[|X|^2\right] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^2 \mathbf{Pr}[X=k].$$

Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz (5.2) για να δείξετε το ζητούμενο. Στην (5.2) η ανισότητα είναι διατυπωμένη για πεπερασμένες ακολουθίες αλλά ισχύει και για ακολουθίες όπου ο δείκτης παίρνει όλες τις ακέραιες τιμές και τα αθροίσματα γίνονται άπειρες σειρές. ✏

Παρατηρούμε τώρα ότι υπάρχει η εξής σχέση ανάμεσα στα πολυώνυμα Bernstein, την τυχαία μεταβλητή $B_{x,n}$ και τη συνάρτηση f:

$$B_n(f)(x) = \mathbf{E}[f(B_{x,n}/n)]. \tag{4.40}$$

4.28. *Βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε γιατί ισχύει αυτό. Θυμίζουμε ότι αν $X \in \mathbb{Z}$ είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή και $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ μια συνάρτηση τότε έχουμε*

$$\mathbf{E}\left[\phi(X)\right] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(k) \mathbf{Pr}\left[X = k\right],$$

με την προϋπόθεση φυσικά ότι η σειρά συγκλίνει απόλυτα. Στη δικιά μας περίπτωση, όπου $X = B_{x,n}$ δεν τίθεται θέμα σύγκλισης μια και όλα τα αθροίσματα έχουν πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών όρων αφού $0 \le B_{x,n} \le n$.

Από την (4.40) γίνεται τώρα φανερό το γιατί πρέπει να περιμένουμε τη σύγκλιση

$$B_n(f)(x) \to f(x) \quad \text{για } n \to \infty.$$

Ο λόγος είναι ότι η τυχαία μεταβλητή $B_{x,n}/n$, η οποία έχει μέση τιμή x τείνει να συγκεντρώνεται γύρω από τη μέση της τιμή (νόμος των μεγάλων αριθμών). Έτσι λοιπόν, με πολύ μεγάλη πιθανότητα, οι τιμές $f(B_{x,n}/n)$ είναι πολύ κοντά στην $f(x)$ λόγω της συνέχειας της f και άρα είναι αναμενόμενο και η μέση τιμή της μεταβλητής αυτής να είναι κοντά στο $f(x)$. Αυτό το συλλογισμό ποσοτικοποιούμε παρακάτω στην απόδειξη.

Γράφουμε E για το ενδεχόμενο

$$E = \left\{ \left| \frac{B_{x,n}}{n} - x \right| \ge n^{-1/3} \right\},$$

και κάνουμε την παρατήρηση ότι η ανισότητα του Chebyshev μας δίνει το παρακάτω άνω φράγμα για την πιθανότητα του E:

$$\mathbf{Pr}\left[E\right] \le n^{-1/3}. \tag{4.41}$$

4.29. *Αποδείξτε ότι η ανισότητα (4.41) προκύπτει από την ανισότητα Chebyshev (4.39).*

Χρησιμοποιήστε το φράγμα $\mathbf{Var}\left[B_{x,n}\right] \le n$ και την τιμή $\lambda = n^{1/6}$ και εφαρμόστε την ανισότητα (4.39) για το ενδεχόμενο E γραμμένο στη μορφή

$$|B_{x,n} - nx| \le \lambda n^{1/2}.$$

Φράσσουμε τώρα τη διαφορά της συνάρτησής μας και της προσέγγισής της από ένα πολυώνυμο Bernstein:

$$\left| f(x) - \mathbb{E} f\left(\frac{B_{x,n}}{n}\right) \right| = \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \mathbf{Pr}\left[B_{x,n} = k\right] \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} f(x) \mathbf{Pr}\left[B_{x,n} = k\right] - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbf{Pr}\left[B_{x,n} = k\right] \right|$$

$$(\text{αφού} \sum_k \mathbf{Pr}\left[B_{x,n} = k\right] = 1)$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} (f(x) - f(k/n)) \mathbf{Pr}\left[B_{x,n} = k\right] \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} |f(x) - f(k/n)| \cdot \mathbf{Pr}\left[B_{x,n} = k\right]$$

(τριγωνική ανισότητα)

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ |x-k/n|<n^{-1/3}}}^{n} + \sum_{\substack{k=0 \\ |x-k/n|\geq n^{-1/3}}}^{n}$$

(διαχωρίζουμε τα k σε δύο είδη)

$$= I + II.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι αν το n είναι αρκετά μεγάλο τότε τα αθροίσματα I και II φράσσονται από ϵ.

Για να φράξουμε το I χρησιμοποιούμε την *ομοιόμορφη συνέχεια* της f (η οποία είναι συνέπεια της συνέχειας της f σε κλειστό διάστημα, δείτε το Πρόβλημα 4.30): για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ώ. αν $|x - y| < \delta$ να έπεται ότι $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Αν λοιπόν το n είναι αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύει $n^{-1/3} < \delta$ τότε στο άθροισμα I η ποσότητα $|f(x) - f(k/n)|$ φράσσεται από ϵ οπότε ισχύει

$$I \leq \epsilon \sum_{\substack{k=0 \\ |x-k/n|\geq n^{-1/3}}}^{n} \mathbf{Pr}\left[B_{x,n} = k\right] \leq \epsilon \sum_{k=0}^{n} \mathbf{Pr}\left[B_{x,n} = k\right] = \epsilon.$$

Για τον όρο II φράσσουμε την ποσότητα $|f(x) - f(k/n)|$ από $2\|f\|_\infty$ (η συνάρτηση f είναι φραγμένη αφού είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα, οπότε $\|f\|_\infty < \infty$) και έχουμε

$$II \leq 2\|f\|_\infty \sum_{\substack{k=0 \\ |x-k/n|<n^{-1/3}}}^{n} \mathbf{Pr}\left[B_{x,n} = k\right]$$

$$= 2\|f\|_\infty \mathbf{Pr}\left[E\right]$$

$$\leq 2\|f\|_\infty n^{-1/3}.$$

Επιλέγοντας και πάλι το n αρκετά μεγάλο (ώστε να ισχύει $2\|f\|_\infty n^{-1/3} < \epsilon$) πετυχαίνουμε να ισχύει και η ανισότητα $II < \epsilon$. Η απόδειξή μας είναι πλήρης.

✏ **4.30.** *Μια συνάρτηση $f : K \to \mathbb{C}$ λέγεται* ομοιόμορφα συνεχής *στο K αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ώ.*

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Η διαφορά με την απλή συνέχεια στο σύνολο K είναι ότι στην περίπτωση της απλής συνέχειας το δ εξαρτάται όχι μόνο από το ϵ αλλά και από το x. Η f δηλ. είναι συνεχής στο K αν

$$\forall x \in K \ \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Δείξτε ότι αν η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ τότε είναι και ομοιόμορφα συνεχής εκεί. Βρείτε επίσης μια συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $h : (0, 1) \to \mathbb{R}$ που να είναι συνεχείς αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

Για να αποδείξετε την ομοιόμορφη συνέχεια της f πρέπει να χρησιμοποιήσετε τη συμπάγεια φραγμένου κλειστού διαστήματος $[a, b]$: κάθε ακολουθία $x_n \in [a, b]$ έχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει (αναγκαστικά σε κάποιο σημείο του $[a, b]$).

Υποθέστε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αυτό σημαίνει ότι για κάποιο $\epsilon > 0$ τότε για υπάρχουν $x_n, y_n \in [a, b]$ τ.ώ. $|x_n - y_n| \to 0$ αλλά με

$$\inf_n |f(x_n) - f(y_n)| > 0.$$

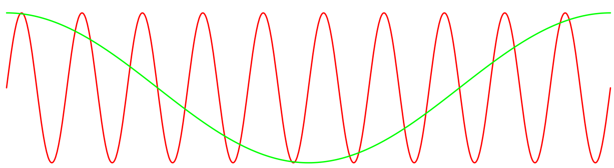
Βρείτε μια ακολουθία δεικτών n_k τέτοια ώστε οι δύο ακολουθίες x_{n_k} και y_{n_k} να συγκλίνουν για $k \to \infty$ και χρησιμοποιήστε τη συνέχεια της f για να καταλήξετε σε άτοπο.

Όσον αφορά τις συναρτήσεις g και h που πρέπει να βρείτε μπορείτε να δοκιμάσετε τις $g(x) = e^x$ και $h(x) = 1/x$.

4.31. *Αν $f : [1, \infty) \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής και $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός, δείξτε ότι η f προσεγγίζεται ομοιόμορφα στο διάστημα $[1, \infty)$ από συναρτήσεις της μορφής $p(1/x)$, όπου p πολυώνυμο.*

Το μέτρο συνέχειας μιας συνάρτησης

Το να πούμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κάποιο σύνολο είναι μια ποιοτική και όχι ποσοτική δήλωση. Είναι μια ιδιότητα που η συνάρτηση την έχει ή όχι. Κατά κάποιον τρόπο όμως υπάρχουν συναρτήσεις που είναι «πιο συνεχείς» από άλλες, όπως για παράδειγμα η πράσινη συνάρτηση στο Σχήμα 4.8 είναι πιο συνεχής από την κόκκινη συνάρτηση στο ίδιο Σχήμα, μεταβάλλεται δηλ. πιο αργά.



Σχήμα 4.8: Μια συνάρτηση (πράσινη) που είναι «πιο συνεχής» από μια άλλη

Η έννοια του *μέτρου συνέχειας* μιας συνάρτησης παίζει ακριβώς αυτό το ρόλο της ποσοτικοποίησης του πόσο γρήγορα αλλάζει μια συνάρτηση όταν αλλάζει η μεταβλητή.

Ορισμός 4.5
Αν $f : K \to \mathbb{C}$ τότε το μέτρο συνέχειας της f στο K είναι η συνάρτηση

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : \ x, y \in K, \ |x - y| \le \delta\}, \quad (\delta > 0). \tag{4.42}$$

Η ποσότητα $\omega_f(\delta)$, με άλλα λόγια, μας λέει πόσο πολύ μπορεί να μεταβληθεί η τιμή της συνάρτησης f αν η μεταβλητή της αλλάξει το πολύ κατά δ.

Η συνάρτηση $\omega_f(\delta)$ μπορεί να μην είναι πεπερασμένη ακόμη κι όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο K. Για παράδειγμα, εύκολα μπορεί κανείς να δει ότι αν $f(x) = e^x$, ορισμένη για $x \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $\delta > 0$ ισχύει $\omega_f(\delta) = +\infty$. Δείτε όμως το Πρόβλημα 4.32.

✏ **4.32.** *Δείξτε ότι μια συνάρτηση $f : K \to \mathbb{C}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής πάνω στο K αν και μόνο αν $\omega_f(\delta) \to 0$ για $\delta \to 0$.* ✏

✏ **4.33.** *Αν $f : K \to \mathbb{C}$ και $f = u + iv$, όπου u, v πραγματικές συναρτήσεις δείξτε τότε ότι*

$$\omega_f(\delta) \le |\omega_u(\delta) + i\omega_v(\delta)| = \sqrt{\omega_u(\delta)^2 + \omega_v(\delta)^2}.$$

✏

✏ **4.34.** *Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ (στα άκρα εννοείται ότι υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι) και $|f'(x)| \le M$ για $x \in [a, b]$, δείξτε ότι $\omega_f(\delta) \le M\delta$, για κάθε $\delta > 0$.*

💡 *Χρησιμοποιήστε το θεώρημα μέσης τιμής για να φράξετε τη διαφορά $|f(x) - f(y)|$.* ✏

Το μέτρο συνέχειας της f είναι υποπροσθετική συνάρτηση.

✏ **4.35.** *Αν $f : I \to \mathbb{R}$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, τότε $\omega_f(\delta_1+\delta_2) \le \omega_f(\delta_1) + \omega_f(\delta_2)$.*

💡 *Αν $|x - y| \le \delta_1 + \delta_2$ τότε, αν υπάρχει z ανάμεσα στα x και y τ.ώ. $|x - z| \le \delta_1$ και $|z - y| \le \delta_2$.* ✏

✏ **4.36.** *Αν $f : I \to \mathbb{R}$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, και $\lambda > 0$ τότε*

$$\omega_f(\lambda\delta) \le (1 + \lambda)\omega_f(\delta).$$

💡 *Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 4.35.* ✏

Εκτίμηση του σφάλματος για τα πολυώνυμα Bernstein

Το Θεώρημα του Weierstrass (Θεώρημα 4.12) δε μας δίνει κάποια εκτίμηση για το πόσο μεγάλο μπορεί να είναι το «σφάλμα» $\|f - p\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)|$ όταν η $f(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$ και το $p(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $\le n$. Σημαντικό ερώτημα είναι το πόσο μικρή μπορεί να γίνει αυτή η ποσότητα αν μας επιτρέπεται να διαλέξουμε κατάλληλα το πολυώμυμο $p(x)$. Με άλλα λόγια μας ενδιαφέρει η ποσότητα

$$E_n(f) = \inf\{\|f - p\|_\infty : \ p(x) \text{ είναι πολυώνυμο βαθμού } \le n\}.$$

Όπως αποδείξαμε στα εισαγωγικά μαθήματα, όταν μιλάγαμε για το πρόβλημα της προσέγγισης των στοιχείων ενός διανυσματικού χώρου από στοιχεία ενός υποχώρου, το παραπάνω infimum «πιάνεται» από κάποιο πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού μέχρι n, μια και ο χώρος αυτός των πολυωνύμων έχει πεπερασμένη διάσταση και μάλιστα ίση με $n+1$ (αφού κάθε τέτοιο πολυώνυμο μπορεί να προσδιορισθεί δίνοντας $n+1$ παραμέτρους, τους συντελεστές του). Φυσικά μια εκτίμηση για την ποσότητα $E_n(f)$ θα πρέπει να επηρεάζεται από το πόσο «καλή» είναι η συνάρτηση f. Αυτή η ιδιότητα της f ποσοτικοποιείται από το μέτρο συνέχειας της f τη συνάρτηση $\omega_f(\delta)$.

Θεώρημα 4.15
Έστω $f \in C([a,b])$. Τότε ισχύει

$$E_n(f) \le 2\omega_f(1/\sqrt{n}).$$

Πιο συγκεκριμένα, αν $B_n(f)$ είναι το n-οστό πολυώνυμο Bernstein της f τότε $\|f - B_n(f)\|_\infty \le 2\omega_f(1/\sqrt{n})$.

Όπως κάναμε και στην απόδειξη του θεωρήματος του Weierstrass μέσω των πολυωνύμων του Bernstein, μπορούμε κι εδώ, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να πάρουμε $[a,b] = [0,1]$, πράγμα το οποίο απλουστεύει τους υπολογισμούς.

Ξεκινάμε χρησιμοποιώντας της σχέση (4.40).

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f)(x)| &= |f(x) - \mathbf{E}\left[f(B_{x,n}/n)\right]| \\
&= |\mathbf{E}\left[f(x) - f(B_{x,n}/n)\right]| \\
&\le \mathbf{E}\left[|f(x) - f(B_{x,n}/n)|\right] \\
&\qquad (\text{τριγωνική ανισότητα: } |\mathbf{E}[X]| \le \mathbf{E}[|X|]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} |f(x) - f(k/n)| \mathbf{Pr}\left[B_{x,n} = k\right] \\
&\qquad (\text{από το } \mathbf{E}[\phi(X)] = \sum_k \phi(k)\mathbf{Pr}[X=k]) \\
&\le \sum_{k=0}^{n} \omega_f(\left|x - \frac{k}{n}\right|) \mathbf{Pr}\left[B_{x,n} = k\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \omega_f(\lambda \frac{1}{\sqrt{n}}) \mathbf{Pr}\left[B_{x,n} = k\right] \quad (\text{με } \lambda = \sqrt{n}\left|x - \tfrac{k}{n}\right|) \\
&\le \omega_f(1/\sqrt{n}) \sum_{k=0}^{n} (1 + \sqrt{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|) \mathbf{Pr}\left[B_{x,n} = k\right] \\
&\qquad (\text{από το Πρόβλημα 4.36}) \\
&= \omega_f(1/\sqrt{n})(1 + \sqrt{n}\mathbf{E}\left[x - \frac{B_{x,n}}{n}\right])
\end{aligned}$$

$$= \omega_f(1/\sqrt{n})(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{E}\left[B_{x,n} - nx\right])$$

$$\leq \omega_f(1/\sqrt{n})(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(B_{x,n}))$$

(από το Πρόβλημα 4.27)

$$\leq 2\omega_f(1/\sqrt{n})$$

(από την (4.38)).

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.15 είναι πλήρης.

Παρατήρηση 4.5
Υπάρχει πολύ καλύτερη εκτίμηση για το σφάλμα $E_n(f)$ από αυτή του Θεωρήματος 4.15. Το Θεώρημα του Jackson μας λέει ότι $E_n(f) \leq C\omega_f(1/n)$, όπου C είναι μια απόλυτη σταθερά.

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου

[1] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Cambridge University Press, 2004.

[2] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Fourier analysis: an introduction*. Vol. 1. Princeton University Press, 2011.

[3] Antoni Zygmund. *Trigonometric series*. Cambridge University Press, 2002.

Κεφάλαιο 5

Η θεωρία L^2

Κύριες βιβλιογραφικές αναφορές για αυτό το Κεφάλαιο είναι οι Zygmund 2002, Katznelson 2004 και Stein and Shakarchi 2011.

5.1 Συνέπειες της ύπαρξης του εσωτερικού γινομένου στο χώρο $L^2(\mathbb{T})$

Αν $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ το εσωτερικό τους γινόμενο είναι η ποσότητα

$$\langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \int f\overline{g}. \tag{5.1}$$

Η ανισότητα Cauchy-Schwarz (Θεώρημα 1.7)

$$\int |f||g| \le \left(\int |f|^2\right)^{1/2} \left(\int |g|^2\right)^{1/2} \tag{5.2}$$

μας εγγυάται ότι ο ολοκληρωτέος στο δεξί μέλος της (5.1) είναι στο $L^1(\mathbb{T})$ και άρα το ολοκλήρωμα που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο υπάρχει.

Ορισμός 5.1
Οι συναρτήσεις $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ ονομάζονται μεταξύ τους κάθετες (ή ορθογώνιες) *αν $\langle f, g \rangle = 0$.*

Μια ακολουθία $f_n \in L^2(\mathbb{T})$ ονομάζεται ορθογώνιο σύστημα *αν τα στοιχεία της είναι ανά δύο κάθετα. Λέγεται* ορθοκανονικό σύστημα *αν τα στοιχεία της έχουν επιπλέον νόρμα 1.*

Το εσωτερικό γινόμενο είναι μια *διγραμμική μορφή*, είναι δηλ. γραμμικό ως προς το πρώτο και το δεύτερο μέλος χωριστά:

$$\langle \lambda f + \mu g, h \rangle = \lambda \langle f, h \rangle + \mu \langle g, h \rangle, \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}, f, g, h \in L^2(\mathbb{T}))$$

$$\langle h, \lambda f + \mu g \rangle = \overline{\lambda} \langle h, f \rangle + \overline{\mu} \langle h, g \rangle, \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}, f, g, h \in L^2(\mathbb{T}))$$

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle} \qquad (f, g \in L^2(\mathbb{T})).$$

Άμεσα βλέπουμε ότι

$$\langle f, f \rangle = \|f\|_2^2.$$

Αυτή η ιδιότητα μας επιτρέπει να κάνουμε πάρα πολλούς υπολογισμούς που αφορούν νόρμες συναρτήσεων (οι οποίες δεν είναι καθόλου απλές στη χρήση τους σε υπολογισμούς) περνώντας στα αντίστοιχα εσωτερικά γινόμενα.

5.1. *Δείξτε το* Πυθαγόρειο θεώρημα*: αν* $f_1, \ldots, f_n \in L^2(\mathbb{T})$ *είναι ανά δύο κάθετα τότε*

$$\|f_1 + \cdots + f_n\|_2^2 = \|f_1\|_2^2 + \cdots + \|f_n\|_2^2.$$

Αν τα f_k *είναι επιπλέον ορθοκανονικό σύστημα και* $u = \sum_{k=1}^N a_k f_k$, $a_k \in \mathbb{C}$, *δείξτε ότι*

$$\|u\|_2^2 = |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2.$$

5.2. *Αν* ϕ_n, $n = 1, 2, \ldots, N$, *είναι ορθοκανονικό σύστημα και* $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ *τότε*

$$\left\langle \sum_{n=1}^N a_n \phi_n, \sum_{n=1}^N b_n \phi_n \right\rangle = \sum_{n=1}^N a_n \overline{b_n}.$$

Ειδικότερα, παίρνοντας $a_n = b_n$, *έχουμε*

$$\left\| \sum_{n=1}^N a_n \phi_n \right\|_2^2 = \sum_{n=1}^N |a_n|^2.$$

5.3. *Αποδείξτε την τριγωνική ανισότητα για την* L^2 *νόρμα:*

$$\|f + g\|_2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2, \quad (f, g \in L^2(\mathbb{T})).$$

Τετραγωνίστε και χρησιμοποιήστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

5.4. *Αν* $f, f_n \in L^2(\mathbb{T})$ *και* $\|f_n - f\|_2 \to 0$ *δείξτε ότι* $\|f_n\|_2 \to \|f\|_2$.

Χρησιμοποιήστε την τριγωνική ανισότητα στη μορφή

$$\|f_n\|_2 \le \|f_n - f\|_2 + \|f\|_2, \quad \|f\|_2 \le \|f - f_n\|_2 + \|f_n\|_2.$$

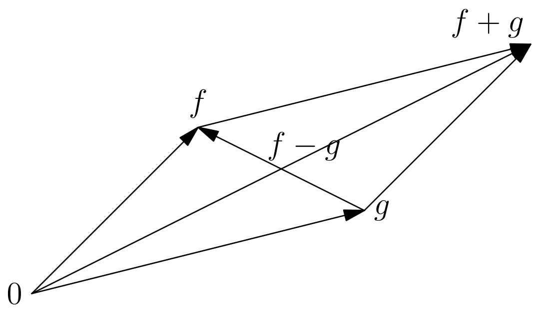
5.5. *Δείξτε τον* κανόνα του παραλληλογράμμου*: αν* $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ *τότε*

$$2\|f\|_2^2 + 2\|g\|_2^2 = \|f + g\|_2^2 + \|f - g\|_2^2.$$

Τι λέει αυτή η ταυτότητα για τα μήκη των πλευρών και των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου; (Δείτε το Σχήμα 5.1.)

Το εσωτερικό γινόμενο είναι συνεχές ως πρός τα δύο ορίσματά του στην τοπολογία της νόρμας L^2. Αυτό σημαίνει ότι αν $\|f_n - f\|_2 \to 0$ και $\|g_n - g\|_2 \to 0$ τότε και

$$\langle f_n, g_n \rangle \to \langle f, g \rangle.$$



Σχήμα 5.1: Το άθροισμα δύο διανυσμάτων f και g και η διαφορά τους ως οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου

Για να το δείξουμε αυτό παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} |\langle f_n, g_n\rangle - \langle f, g\rangle| &= |\langle f_n, g_n\rangle - \langle f_n, g\rangle + \langle f_n, g\rangle - \langle f, g\rangle| \\ &\le |\langle f_n, g_n - g\rangle| + |\langle f_n - f, g\rangle| \\ &\le \|f_n\|_2\|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2\|g\|_2 \\ &\qquad \text{(από Cauchy-Schwarz)} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

από τις υποθέσεις μας και από το Πρόβλημα 5.4.

Ο γραμμικός χώρος $L^2(\mathbb{T})$ με τη μετρική που ορίζεται από την L^2 νόρμα είναι πλήρης χώρος (αυτό δεν το αποδεικνύουμε εδώ). Συνέπεια της πληρότητας είναι το παρακάτω.

Λήμμα 5.1
Αν $\phi_n \in L^2(\mathbb{T})$ είναι ορθοκανονικό σύστημα και $\sum_n |a_n|^2 < \infty$ για κάποια ακολουθία μιγαδικών αριθμών a_n, τότε η σειρά

$$\sum_n a_n\phi_n$$

συγκλίνει στη νόρμα L^2. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $f \in L^2(\mathbb{T})$ τ.ώ. $\left\|f - \sum_{n=1}^N a_n\phi_n\right\|_2 \to 0$ για $N \to \infty$.

Απόδειξη.
Λόγω της πληρότητας αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n\phi_n$$

είναι Cauchy. Έστω $\epsilon > 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένας δείκτης n_0 ώστε αν $m > n \ge n_0$ τότε να ισχύει

$$\|S_m - S_n\|_2 \le \epsilon.$$

Αλλά

$$\|S_m - S_n\|_2^2 = \left\|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\phi_k\right\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|^2 \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Το δεξί μέλος στην παραπάνω ανισότητα είναι η «ουρά» της συγκλίνουσας σειράς $\sum_n |a_n|^2$, άρα πάει στο 0 για $n \to \infty$. Άρα μπορούμε να επιλέξουμε n_0 αρκετά μεγάλο ώστε για $n_0 \le n < m$ να ισχύει $\|S_m - S_n\|_2 \le \epsilon$. ∎

Είναι εύκολο να δούμε με απλές πράξεις ότι οι εκθετικές συναρτήσεις

$$e_n(x) = e^{inx}, \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα.

✏ **5.6.** *Αποδείξτε οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις*

$$1, \quad \sqrt{2}\sin kx, \quad \sqrt{2}\cos kx, \quad (k \in \mathbb{N}),$$

είναι ορθοκανονικό σύστημα στον $L^2(\mathbb{T})$.

💡 *Μπορείτε να εκφράσετε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις μέσω των εκθετικών και να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι οι εκθετικές συναρτήσεις αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα.* ✏

Παρατηρήστε επίσης ότι για $f \in L^2$ έχουμε

$$\langle f, e_n\rangle = \widehat{f}(n)$$

και

$$S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(n) e_n.$$

Θεώρημα 5.1 (Ανισότητα Bessel)
Αν $f \in L^2(\mathbb{T})$ και τα ϕ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύστημα τότε, αν $g = \sum_{k=1}^{N} \langle f, \phi_k\rangle \phi_k$, ισχύει

$$\|g\|_2^2 = \sum_{k=1}^{N} |\langle f, \phi_k\rangle|^2 \le \|f\|_2^2. \tag{5.3}$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
0 &\le \|f - g\|_2^2 \\
&= \langle f - g, f - g\rangle \\
&= \|f\|_2^2 - \langle g, f\rangle - \langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle \\
&= \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} \langle f, \phi_k\rangle\langle \phi_k, f\rangle - \sum_{k=1}^{N} \overline{\langle f, \phi_k\rangle}\langle f, \phi_k\rangle + \sum_{k=1}^{N} |\langle f, \phi_k\rangle|^2
\end{aligned}$$

(γραμμικότητα, Πρόβλημα 5.2)

$$= \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} \langle f, \phi_k\rangle \overline{\langle f, \phi_k\rangle} - \sum_{k=1}^{N} \overline{\langle f, \phi_k\rangle} \langle f, \phi_k\rangle + \sum_{k=1}^{N} |\langle f, \phi_k\rangle|^2$$

$$= \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} |\langle f, \phi_k\rangle|^2.$$

Αυτό συνεπάγεται

$$\sum_{k=1}^{N} |\langle f, \phi_k\rangle|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

∎

Ορισμός 5.2
Ένα ορθογώνιο σύστημα $\phi_n \in L^2(\mathbb{T})$ λέγεται πλήρες αν η μόνη συνάρτηση στο $L^2(\mathbb{T})$ που είναι ορθογώνια σε όλες τις ϕ_n είναι η μηδενική.

Οι εκθετικές συναρτήσεις $e_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, αποτελούν πλήρες ορθοκανονικό σύστημα. Πράγματι, αν $f \in L^2$ είναι κάθετη σε κάθε e_n αυτό σημαίνει ότι $\widehat{f}(n)$ είναι 0 για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, και από το Θεώρημα Μοναδικότητας στο $L^1(\mathbb{T})$ (Πόρισμα 4.6) προκύπτει $f = 0$.

5.7. *Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $\phi_n \in L^2(\mathbb{T})$ είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα αν και μόνο αν οι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί των ϕ_n είναι πυκνοί στο χώρο $L^2(\mathbb{T})$.*

Για την κατεύθυνση «αν» (πυκνότητα γραμμικών συνδυασμών συνεπάγεται τη μη ύπαρξη μη μηδενικού διανύσματος ορθογώνιου ως προς όλα τα ϕ_k) χρειάζεστε απλά τη συνέχεια του εσωτερικού γινομένου. Για την άλλη κατεύθυνση, υποθέστε ότι δεν ισχύει η πυκνότητα και χρησιμοποιήστε την ανισότητα του Bessel για να κατασκευάσετε ένα μη μηδενικό διάνυσμα ορθογώνιο ως προς όλα τα ϕ_k.

5.8. *Αν $\phi_n \in L^2(\mathbb{T})$ είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα δείξτε ότι μια συνάρτηση $f \in L^2(\mathbb{T})$ είναι πλήρως καθορισμένη αν γνωρίζουμε τις ποσότητες $\langle f, \phi_n\rangle$ για όλα τα n.*

5.9. *Έστω ϕ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, ένα ορθοκανονικό σύστημα και $f \in L^2(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι η ποσότητα*

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} x_k \phi_k \right\|_2$$

ελαχιστοποιείται όταν $x_k = \langle f, \phi_k\rangle$ και μόνο γι' αυτή την τιμή.

Θεώρημα 5.2 (Parseval)
Αν ϕ_n είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα τότε για κάθε $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ έχουμε

$$\langle f, g\rangle = \sum_n \langle f, \phi_n\rangle \overline{\langle g, \phi_n\rangle}, \quad \|f\|_2^2 = \sum_n |\langle f, \phi_n\rangle|^2. \tag{5.4}$$

Ειδικότερα, παίρνοντας στη θέση των ϕ_n τις εκθετικές συναρτήσεις e_n, $n \in \mathbb{Z}$, παίρνουμε

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)}, \quad \|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|^2. \tag{5.5}$$

Απόδειξη.
Από την ανισότητα του Bessel προκύπτει ότι οι συναρτήσεις

$$\widetilde{f} = \sum_n \langle f, \phi_n\rangle \phi_n, \quad \widetilde{g} = \sum_n \langle g, \phi_n\rangle \phi_n,$$

είναι καλώς ορισμένες αφού οι σειρές που τις ορίζουν συγκλίνουν στο L^2. Από την πυκνότητα των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών των ϕ_n (Πρόβλημα 5.7) προκύπτει ότι $f = \widetilde{f}, g = \widetilde{g}$, και το πρώτο κομμάτι της (5.4) προκύπτει από τη συνέχεια του εσωτερικού γινομένου. Οι ισότητες (5.5) είναι άμεση συνέπεια των (5.4). ∎

Μπορεί κανείς να δει το Θεώρημα 5.2 ως μια ισομετρία

$$(f(x), x \in \mathbb{T}) \quad \to \quad (\widehat{f}(n), n \in \mathbb{Z}),$$

(που απεικονίζει δηλ. μια συνάρτηση f στους συντελεστές Fourier της) ανάμεσα στο χώρο $L^2(\mathbb{T})$ και το χώρο $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ο γραμμικός χώρος όλων των ακολουθιών a_n, $n \in \mathbb{Z}$, για τις οποίες ισχύει

$$\|a_n\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Η ποσότητα $\|a_n\|_2$ που ορίζει η προηγούμενη εξίσωση αποτελεί μια νόρμα στο χώρο αυτό και ορίζει τη απόσταση $d(a, b) = \|a - b\|_2$ ανάμεσα στις ακολουθίες a_n και b_n.

Δεν υπάρχει αντίστοιχο τέτοιο θεώρημα για χώρους L^p με $p \neq 2$. Υπό μία έννοια ο χώρος L^2 είναι ο μόνος στον οποίο η νόρμα της συνάρτησης είναι τόσο προφανής αν κανείς γνωρίζει τους συντελεστές Fourier της συνάρτησης. Η ύπαρξη της ισότητας του Parseval είναι που κάνει την περίπτωση του $L^2(\mathbb{T})$ τόσο πιο «εύκολη» από τους άλλους χώρους (μιλάμε για την ανάλυση Fourier πάντα αν και αυτό είναι μάλλον γενικότερη διαπίστωση).

✏ **5.10.** *Αν $f \in C^1(\mathbb{T})$ και $\int f = 0$ δείξτε ότι $\int |f|^2 \le \int |f'|^2$.*

💡 *Χρησιμοποιήστε την ισότητα του Parseval.* ✏

✏ **5.11.** *Αν $f \in C^1(\mathbb{T})$ δείξτε ότι $\sum_n \left|\widehat{f}(n)\right| < \infty$.*

💡 *Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα Parseval για να βρείτε, μέσω της ανισότητας Cauchy-Schwarz, ένα κατάλληλο άνω φράγμα για την ποσότητα $\sum \left|\widehat{f}(n)\right|$.* ✏

✏**Ν 5.1.** New! *Υπολογίστε, ως συνάρτηση του* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, *ένα τύπο για τη σειρά*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2}.$$

Έστω $f(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} e^{i(\pi - x)\alpha}$. *Δείξτε ότι* $\widehat{f}(n) = \frac{1}{n+\alpha}$ $(n \in \mathbb{Z})$ *και χρησιμοποιήστε τον τύπο του Parseval.* ✏

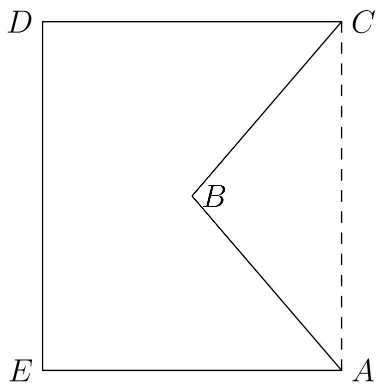
✏**Ν 5.2.** New! *Αν* $f(x) = x$, *για* $x \in [0, 2\pi]$, *υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της* f *και χρησιμοποιήστε την ταυτότητα Parseval για να υπολογίσετε το άθροισμα* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. ✏

5.2 Εφαρμογή: Η ισοπεριμετρική ανισότητα

Σε αυτή την παράγραφο θα δώσουμε μια απόδειξη που βασίζεται σε σειρές Fourier της «ισοπεριμετρικής ανισότητας»

$$A \leq \frac{\ell^2}{4\pi}. \tag{5.6}$$

Εδώ ℓ είναι το μήκος μιας απλής κλειστής καμπύλης γ στο επίπεδο και A είναι το εμβαδό που περικλείει αυτή η καμπύλη. Ένας άλλος τρόπος να διατυπώσει κανείς την ισοπεριμετρική ανισότητα είναι να πει ότι από όλες τις απλές κλειστές καμπύλες του επιπέδου με δεδομένο μήκος ο κύκλος είναι αυτός που περικλείει το μεγαλύτερο εμβαδό. Με αυτό τον τρόπο είχε διατυπωθεί το πρόβλημα από την αρχαιότητα. Η λύση που θα περιγράψουμε δεν είναι η πρώτη χρονικά. Οφείλεται στον Hurwitz και δόθηκε το 1901, ενώ η πρώτη αυστηρή απόδειξη οφείλεται στον Steiner στα μέσα του 19ου αιώνα, ο οποίος χρησιμοποίησε αυτό που σήμερα ονομάζουμε «συμμετρικοποίηση Steiner».



Σχήμα 5.2: Το $ABCDE$ είναι ένα μη κυρτό πολύγωνο

✏ **5.12.** *Ένα πολύγωνο ονομάζεται κυρτό αν για κάθε πλευρά του η ευθεία που αυτή ορίζει χωρίζει το επίπεδο σε δύο ανοιχτά ημιεπίπεδα ένα από τα οποία δεν τέμνει το πολύγωνο.*

Δείξτε ότι αν ένα πολύγωνο με μήκος ℓ *δεν είναι κυρτό τότε υπάρχει ένα άλλο πολύγωνο με το ίδιο μήκος και με μεγαλύτερο εμβαδό.*

Δείτε το παράδειγμα που δίνεται στο Σχήμα 5.2 και τροποποιήστε κατάλληλα το πολύγωνο $ABCDE$ χρησιμοποιώντας μια συμμετρία γύρω από τη διακεκομμένη γραμμή AC.

Η λύση αυτού του προβλήματος στη μέγιστη γενικότητα προϋποθέτει ότι έχουμε πρώτα ξεκαθαρίσει τις έννοιες του μήκους και του περικλειόμενου εμβαδού για μια καμπύλη στο επίπεδο. Αλλά, και μόνο το γεγονός ότι μια απλή (όχι αυτοτεμνόμενη δηλαδή) κλειστή καμπύλη, μια συνεχής δηλ. συνάρτηση

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(a) = \gamma(b),$$

χωρίζει το επίπεδο σε δύο συνεκτικά κομμάτια, το εσωτερικό της καμπύλης (το φραγμένο κομμάτι) και το εξωτερικό της, αποτελεί το Θεώρημα του Jordan το οποίο δεν είναι καθόλου απλό στην απόδειξή του, και πρόκειται να το πάρουμε ως δεδομένο. Επίσης το ποιες καμπύλες «έχουν μήκος» δεν είναι καθόλου φανερό γενικά, είναι όμως ξεκάθαρο αν υποθέσουμε, όπως θα κάνουμε από δω και πέρα, ότι η γ είναι κατά τμήματα C^∞. Σε αυτή την περίπτωση το μήκος L της καμπύλης $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ δίδεται από τον τύπο

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

όπως μαθαίνουμε στα μαθήματα Απειροστικού Λογισμού. Το διάνυσμα $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ είναι το διάνυσμα της ταχύτητας τη χρονική στιγμή t όταν κινούμαστε πάνω στην καμπύλη με τρόπο ώστε η θέση μας στο χρόνο t να είναι η $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Το μέτρο της ταχύτητας $|\gamma'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ είναι η ποσότητα που ολοκληρώνουμε ως προς το χρόνο για να βρούμε το μήκος που διανύσαμε.

Ένα άλλο πολύ βασικό θεώρημα Απειροστικού Λογισμού το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε είναι το θεώρημα του Green για τη μετατροπή διπλών ολοκληρωμάτων σε επικαμπύλια.

Θεώρημα 5.3 (Green)
Αν η κατά τμήματα C^∞, απλή, κλειστή καμπύλη γ περικλείει το χωρίο $\Omega \in \mathbb{R}^2$ και $P(x, y), Q(x, y)$ είναι C^1 συναρτήσεις ορισμένες σε ένα ανοιχτό σύνολο του επιπέδου που περιέχει το Ω, τότε ισχύει

$$\iint_\Omega Q_x - P_y \, dx\, dy = \oint_\gamma P dx + Q dy.$$

Οι ποσότητες Q_x και P_y είναι οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων ως προς τις αντίστοιχες μεταβλητές και το ολοκλήρωμα δεξιά είναι επικαμπύλιο ολοκλήρωμα το οποίο δίνεται από τον τύπο

$$\oint_\gamma P dx + Q dy = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) - Q(x(t), y(t))y'(t)]\, dt.$$

Υποθέτουμε πάντα ότι η καμπύλη διανύεται κατά την θετική (αριστερόστροφη) φορά. Όταν κινούμαστε δηλ. πάνω στην καμπύλη γ σύμφωνα με την παραμέτριση $(x(t), y(t))$, με το t να αυξάνει, τότε έχουμε το χωρίο Ω στα αριστερά μας (δείτε το Σχήμα 5.3).

Με $Q(x, y) = x, P(x, y) = 0$ παίρνουμε από το Θεώρημα 5.3

$$A = \iint_\Omega 1\, dx\, dy = \oint_\gamma x\, dy = \int_a^b x(t)y'(t)\, dt.$$

Ομοίως παίρνοντας $Q(x, y) = 0, P(x, y) = -y$ παίρνουμε

$$A = \iint_\Omega 1\, dx\, dy = -\oint_\gamma y\, dx = -\int_a^b y(t)x'(t)\, dt.$$

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω παίρνουμε την πιο συμμετρική έκφραση για το εμβαδό

$$A = \frac{1}{2}\oint_\gamma x\, dy - y\, dx = \int_a^b x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\, dt. \tag{5.7}$$

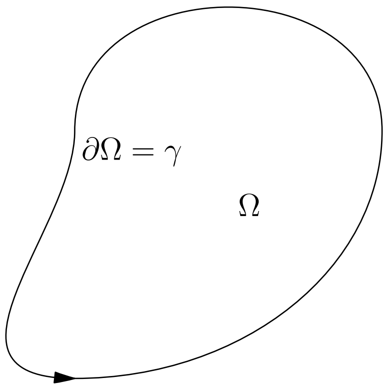
✏ **5.13.** *Δίδεται ένα πολυγωνικό χωρίο στο επίπεδο μέσω των συντεταγμένων των κορυφών του*

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{N-1}, y_{N-1}),$$

όπου η κορυφή (x_j, y_j) έπεται της (x_{j-1}, y_{j-1}) και προηγείται της (x_{j+1}, y_{j+1}) όταν διανύουμε αριστερόστροφα την πολυγωνική γραμμή που αποτελεί το σύνορο του χωρίου (τα $j \pm 1$ τα ερμηνεύουμε $\mathrm{mod} N$).

Δώστε ένα (όσο γίνεται πιο απλό) τύπο για το εμβαδό του χωρίου μέσω των αριθμών $x_j, y_j,\ j = 0, 1, \ldots, N-1$.

Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 5.3 και υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας μια απλή παραμέτριση για καθένα από τα ευθύγραμμα τμήματα (x_j, y_j)–(x_{j+1}, y_{j+1}) που απαρτίζουν το σύνορο. ✏



Σχήμα 5.3: Η καμπύλη γ περικλείει το χωρίο Ω, του οποίου είναι το σύνορο $\gamma = \partial\Omega$

Τώρα πλέον έχουμε μια αναλυτική έκφραση για το μήκος της καμπύλης και μια για το εμβαδό που αυτή περικλείει. Κάνουμε τώρα την επιπλέον υπόθεση ότι χρονικό διάστημα κίνησης είναι το $[a, b] = [0, 2\pi]$ και ότι η ταχύτητα κίνησης έχει σταθερό μέτρο ίσο με 1 καθόλη τη διάρκεια της κίνησης. Η δεύτερη αυτή υπόθεση μαζί με την πρώτη έχουν ως συνέπεια ότι το συνολικό μήκος της καμπυλης είναι

$$L = \int_0^{2\pi} \left|\gamma'(t)\right| dt = 2\pi. \tag{5.8}$$

Όσον αφορά την πρώτη υπόθεση αυτή φυσικά δεν αποτελεί βλάβη της γενικότητας αφού μπορούμε να αναπαραμετρίσουμε την καμπύλη σε όποιο χρονικό διάστημα θέλουμε. Αλλά και η δεύτερη υπόθεση δεν αποτελεί βλάβη της γενικότητας αφού η ισοπεριμετρική ανισότητα που πάμε να αποδείξουμε είναι αναλλοίωτη ως προς την αλλαγή κλίμακας στο επίπεδο (δε θα μπορούσε να είναι διαφορετικά), στο μετασχηματισμό δηλ. $(x, y) \to (\lambda x, \lambda y)$, όπου $\lambda > 0$. Πράγματι μετά από αυτό τον μετασχηματισμό το εμβαδό της καμπύλης πολλαπλασιάζεται επί λ^2 ενώ το μήκος της πολλαπλασιάζεται με λ. Άρα η ισοπεριμετρική ανισότητα ισχύει για μια καμπύλη αν και μόνο αν ισχύει για την καμπύλη αυτή σε οποιαδήποτε κλίμακα $\lambda > 0$, αφού το μήκος ℓ εμφανίζεται στην ανισότητα τετραγωνισμένο ενώ το εμβαδό στην πρώτη δύναμη. Παίρνουμε λοιπόν την καμπύλη μας να έχει συνολικό μήκος $L = 2\pi$ και την ταχύτητά μας να έχει μέτρο 1 για κάθε $t \in [0, 2\pi]$. Η ισοπεριμετρική ανισότητα παίρνει τώρα τη μορφή

$$A \le \pi.$$

Υπό αυτές τις (αβλαβείς) υποθέσεις οι συναρτήσεις $x(t), y(t)$ που καθορίζουν την καμπύλη μας είναι 2π-περιοδικές συναρτήσεις που είναι τμηματικά C^∞, και άρα είναι και στο $L^2(\mathbb{T})$ όπως και οι παράγωγοί τους $x'(t), y'(t)$. Στις συναρτήσεις αυτές και στις παραγώγους τους αντιστοιχούν οι σειρές Fourier

$$x(t) \sim \sum_n \widehat{x}(n)e^{int},\ y(t) \sim \sum_n \widehat{y}(n)e^{int},$$

και

$$x'(t) \sim \sum_n in\widehat{x}(n)e^{int},\ y'(t) \sim \sum_n in\widehat{y}(n)e^{int}.$$

Η υπόθεση $|\gamma'(t)| = 1$ συνεπάγεται ότι $|\gamma'(t)|^2 = |\gamma'(t)|$, οπότε

$$\int_0^{2\pi} x'(t)^2 + y'(t)^2\, dt = 2\pi,$$

και χρησιμοποιώντας την ισομετρία του Parseval (Θεώρημα 5.2) παίρνουμε

$$\sum_n |n|^2(|\widehat{x}(n)|^2 + |\widehat{y}(n)|^2) = 1. \tag{5.9}$$

Το ολοκλήρωμα (5.7), επίσης χρησιμοποιώντας την ισομετρία του Parseval, γράφεται

$$A = -i\pi \sum_n n(\widehat{x}(n)\overline{\widehat{y}(n)} - \widehat{y}(n)\overline{\widehat{x}(n)}). \tag{5.10}$$

Παρατηρούμε τώρα την ανισότητα

$$\left|\widehat{x}(n)\overline{\widehat{y}(n)} - \widehat{y}(n)\overline{\widehat{x}(n)}\right| \le 2|\widehat{x}(n)||\widehat{y}(n)| \le |\widehat{x}(n)|^2 + |\widehat{y}(n)|^2$$

και, χρησιμοποιώντας ότι $|n| \le |n|^2$, παίρνουμε

$$A \le \pi \sum_n |n|^2 (|\widehat{x}(n)|^2 + |\widehat{y}(n)|^2) \le \pi,$$

λόγω της (5.9), το οποίο συμπληρώνει την απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας.

5.14. *Αποδείξτε ότι αν για μια κατά τμήματα C^∞ καμπύλη ισχύει $A = \ell^2/(4\pi)$ τότε η καμπύλη είναι κύκλος.*

Στην προηγούμενη απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας δείτε που χρησιμοποιήσαμε κάποιες ανισότητες και τι συμπέρασμα βγαίνει αν αυτές ισχύουν ως ισότητες. Αρχίστε από την ανισότητα $|n| \le |n|^2$, $n \in \mathbb{Z}$.

5.3 Ορθογώνια πολυώνυμα

5.3.1 Ορθογωνιοποίηση Gram–Schmidt

Ορισμός 5.3
Αν $e_1, \ldots, e_k$ είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα συναρτήσεων σε ένα γραμμικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle e_j, e_j \rangle = 1 \text{ και } \langle e_i, e_j \rangle = 0 (\text{για } i \ne j),$$

και $V = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$ είναι ο γραμμικός χώρος που παράγουν η ορθογώνια προβολή *μιας συνάρτησης f στο V είναι η συνάρτηση*

$$P_V(f) = \sum_{j=1}^{k} \langle f, e_j \rangle e_j.$$

Παρατήρηση 5.1
Είναι φανερό ότι $P_V(f) \in V$. Έχουμε επίσης ότι το διάνυσμα $f - P_V(f)$ είναι κάθετο στο χώρο V, είναι δηλ. κάθετο σε κάθε διάνυσμα του V. Αν $v \in V$ πρέπει να δείξουμε ότι $\langle f - P_V(f), v \rangle = 0$. Αρκεί να το κάνουμε για τα διανύσματα $e_1, \ldots, e_k$ στη θέση του v μια και είναι μια γραμμική σχέση ως προς v. Αυτό επαληθεύεται εύκολα (κάντε το).

Κάτι άλλο που οφείλουμε να πούμε εδώ είναι ότι κάθε γραμμικός χώρος (πάνω στον οποίο έχουμε ορίσει κάποιο εσωτερικό γινόμενο (ώστε να έχει νόημα να μιλάμε για ορθογωνιότητα) έχει κάποια ορθοκανονική βάση $e_1, \ldots, e_k$ όπου $k = \dim V$. Αυτό είναι εύκολο να δειχτεί επαγωγικά ως προς τη διάσταση k και μπορεί επίσης να αποδειχτεί με χρήση της λεγόμενης ορθοκανονικοποίησης Gram–Schmidt την οποία θα δούμε παρακάτω.

5.15. *Δείξτε ότι*

$$\|P_V(f)\|_2^2 = \sum_{j=1}^{k} |\langle f, e_j \rangle|^2. \tag{5.11}$$

Εφαρμόστε το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Πρόβλημα 5.1).

✏ **5.16.** *Αποδείξτε ότι το διάνυσμα $P_V(f)$ είναι το μοναδικό διάνυσμα v του V τ.ώ. $\langle f-v,w\rangle=0$ για κάθε $w\in V$.*

💡 *Αν υπάρχει και άλλο τέτοιο διάνυσμα v' τότε το τρίγωνο fvv' έχει ορθή γωνία και στην κορυφή v και στην κορυφή v'. Δείξτε ότι αυτό είναι αδύνατο εφαρμόζοντας δύο φορές το Πυθαγόρειο θεώρημα. Με άλλα λόγια η υποτείνουσα είναι πάντα η αυστηρά μεγαλύτερη πλευρά σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο και άρα δε μπορεί να υπάρχουν δύο υποτείνουσες.* ✏

✏ **5.17.** *Αν $V=\mathrm{span}\{e_1,\ldots,e_k\}$ και τα e_j είναι ανά δύο ορθογώνια αλλά όχι κατ' ανάγκη μοναδιαία, από ποιον τύπο δίνεται η προβολή $P_V(f)$;*

💡 *Κανονικοποιήστε τα e_j.* ✏

✏ **5.18.** *Αποδείξτε ότι το διάνυσμα (συνάρτηση) $P_V(f)$ δεν εξαρτάται από τα $e_1,e_2,\ldots,e_k$ αλλά μόνο από το χώρο V. Αν δηλ. $e'_1,\ldots,e'_k$ είναι ένα άλλο ορθοκανονικό σύστημα στο χώρο V (οπότε αυτόματα $V=\mathrm{span}\{e'_1,\ldots,e'_k\}$) τότε ισχύει και πάλι*

$$P_V(f)=\sum_{j=1}^{k}\langle f,e'_j\rangle e'_j.$$

💡 *$P_V(f)=\sum_{j=1}^k \lambda_j e'_j$ για κάποια $\lambda_j\in\mathbb{C}$ αφού τα e'_j παράγουν το V. Παίρνοντας εσωτερικό γινόμενο αυτής της ισότητας με τα e'_i παίρνετε το ζητούμενο.* ✏

✏ **5.19.** *Δείξτε ότι τα συμμετρικά μερικά αθροίσματα $S_N(f)$ της σειράς Fourier μιας $f\in C^{2\pi}$ είναι ακριβώς η προβολή της f στο γραμμικό χώρο που παράγουν οι συναρτήσεις*

$$e^{-iNx},e^{-i(N-1)x},\ldots,1,e^{ix},e^{i2x},\ldots,e^{iNx}.$$

✏

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι πολύ σημαντικό για την Ανάλυση.

Θεώρημα 5.4 (Η προβολή είναι η βέλτιστη προσέγγιση)

Αν V είναι ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης ενός γραμμικού χώρου συναρτήσεων X και $f\in$ τότε το διάνυσμα $P_V(f)$ είναι το μοναδικό διάνυσμα $v\in V$ που ελαχιστοποιεί την απόσταση $\|f-v\|_2$.

Αρκεί να δείξουμε ότι αν $v\in V$ είναι διαφορετικό από το $P_V(f)$ τότε

$$\|f-P_V(f)\|_2<\|f-v\|_2.$$

Όμως το τρίγωνο $fP_V(f)v$ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία στην κορυφή $P_V(f)$, άρα η υποτείνουσα fv έχει μεγαλύτερο μήκος από την κάθετη πλευρά $fP_V(f)$.

Όπως είδαμε και στο Θεώρημα 5.4 το να μπορεί κανείς να υπολογίσει την ορθογώνια προβολή ενός διανύσματος f σε ένα γραμμικό χώρο V ισοδυναμεί με το να βρεί το πλησιέστερο διάνυσμα από το χώρο V στο διάνυσμα f. Το αποδείξαμε αυτό στο Θεώρημα 5.4. Εκεί η απόδειξη έγινε για ένα συγκεκριμένο διανυσματικό χώρο και εσωτερικό γινόμενο αλλά ισχύει σε οποιαδήποτε περίπτωση. Και το να υπολογίσουμε την ορθογώνια προβολή του f αν διαθέτουμε ήδη μια ορθοκανονική βάση $e_1, \ldots, e_k$ του V είναι πολύ εύκολο και δίνεται από τον Ορισμό 5.3.

Οι περισσότεροι γραμμικοί χώροι που μας απασχολούν εδώ είναι φυσικά χώροι συναρτήσεων και τα διανύσματα είναι συναρτήσεις, αλλά δε χάνουμε τίποτε με το να την κρύψουμε αυτή την πληροφορία σε αυτή τη φάση, μια και το είδος διανυσμάτων για το οποίο μιλάμε δεν ενδιαφέρει (ακόμη) αλλά μόνο το ότι μπορούμε αυτά να τα προσθέτουμε μεταξύ τους και να τα πολλαπλασιάζουμε με αριθμούς παραμένοντας στον ίδιο χώρο. Αυτό που χρειαζόμαστε τώρα, μέχρι να αρχίσουμε να μιλάμε για χώρους πολυωνύμων, είναι ακριβώς αυτή η γραμμική δομή και το εσωτερικό γινόμενο που θεωρούμε ότι υπάρχει ορισμένο στο γραμμικό μας χώρο.

Είναι λοιπόν πολύτιμο το να έχουμε μια ορθοκανονική βάση του V. Αυτό το επιτυγχάνει κανείς με μια αλγοριθμική διαδικασία, τη λεγόμενη ορθοκανονικοποίηση Gram–Schmidt.

Η διαδικασία αυτή παίρνει ως είσοδο μια ακολουθία $f_1, f_2, \ldots$ από γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα σε κάποιο γραμμικό χώρο V (ο χώρος V μπορεί να είναι και απειροδιάστατος και η ακολουθία f_n μπορεί και να είναι μια άπειρη ακολουθία διανυσμάτων). Η διαδικασία παράγει μια άλλη ορθοκανονική ακολουθία $e_1, e_2, \ldots$.

Θεώρημα 5.5 (Η διαδικασία Gram–Schmidt)
Έστω V γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και $f_1, f_2, \ldots \in V$ μια γραμμικώς ανεξάρτητη ακολουθία διανυσμάτων. Τα διανύσματα $e_1, e_2, \ldots \in V$ (και η βοηθητική ακολουθία $v_2, v_3, \ldots$) ορίζονται ως εξής:

$$e_1 = \frac{1}{\|f_1\|_2} f_1$$

$$v_k = f_k - \langle f_k, e_1 \rangle e_1 + \cdots \langle f_k, e_{k-1} \rangle e_{k-1} \qquad (\textit{για } k \geq 2)$$

$$e_k = \frac{1}{\|v_k\|_2} v_k \qquad (\textit{για } k \geq 2).$$

Τότε τα e_j είναι ανά δύο ορθογώνια και έχουν $\|e_j\|_2 = 1$ και επίσης παράγουν τους ίδιους γραμμικούς χώρους με τα f_j, δηλ. για κάθε $k \geq 1$

$$\mathrm{span}\{f_1, \ldots, f_k\} = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_k\}.$$

Το ότι η νόρμα των e_j είναι 1 είναι άμεσο από τον ορισμό.

Αποδεικνύουμε με επαγωγή ως προς k ότι τα διανύσματα $e_1, \ldots, e_k$ είναι ορθοκανονικά και παράγουν τον ίδιο χώρο με τα $f_1, \ldots, f_k$. Αυτό είναι προφανές για $k = 1$ αφού το e_1 είναι πολλαπλάσιο του f_1. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει η πρόταση για το $k-1$ αποδεικνύουμε κατ' αρχήν ότι το e_k είναι κάθετο προς τα $e_1, \ldots, e_{k-1}$. Αυτό είναι φανερό μια και το v_k ισούται με το f_k μείον την προβολή του στο χώρο $\mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$

και άρα (Πρόβλημα 5.16) είναι κάθετο σε ολόκληρο το χώρο $\mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$ και άρα και στα ίδια τα $e_1, \ldots, e_k$. Το διάνυσμα e_k είναι απλά η κανονικοποίηση του v_k και άρα είναι κι αυτό ορθογώνιο στα $e_1, \ldots, e_k$. Τέλος, αφού

$$f_k - v_k \in \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_{k-1}\} = \mathrm{span}\{f_1, \ldots, f_{k-1}\}$$

προκύπτει ότι

$$\mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_{k-1}, v_k\} = \mathrm{span}\{f_1, \ldots, f_{k-1}, f_k\}$$

και άρα, αφού το v_k είναι πολλαπλάσιο του e_k, έχουμε και το επιθυμητό

$$\mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_{k-1}, e_k\} = \mathrm{span}\{f_1, \ldots, f_{k-1}, f_k\}.$$

και η επαγωγική απόδειξη είναι πλήρης.

Κατά κάποιο τρόπο η διαδικασία Gram–Schmidt εξετάζει τα στοιχεία f_k ένα προς ένα και κρατάει από κάθε f_k το «κομμάτι» του που είναι ορθογώνιο με e_j που έχουν υπολογιστεί μέχρι εκείνη τη στιγμή, δηλ. τα $e_1, \ldots, e_{k-1}$. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι στον ορισμό του e_k μέσω του βοηθητικού διανύσματος v_k (που είναι ουσιαστικά το e_k πριν κανονικοποιηθεί) όλα τα στοιχεία που εμφανίζονται στο δεξί μέλος έχουν ήδη υπολογιστεί στα προηγούμενα στάδια της διαδικασίας και άρα γνωρίζουμε ό,τι χρειάζεται για τον υπολογισμό.

✏ **5.20.** *Δείξτε ότι κάθε χώρος πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο έχει ορθοκανονική βάση.* ✏

✏ **5.21.** *Εφαρμόστε τη διαδικασία ορθοκανονικοποίησης Gram–Schmidt στα διανύσματα*

$$f_1(x) = 1,\ \ f_2(x) = 1 - x^2,\ \ f_3(x) = 1 - x$$

στο γραμμικό χώρο $C([0,1])$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$. ✏

✏ **5.22.** *Στο χώρο $C([a,b])$ των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a,b]$ βρείτε ένα τύπο για το εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$ αν*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} f_j x^j, \quad g(x) = \sum_{j=0}^{n} g_j x^j$$

είναι δύο πολυώνυμα, μέσω των συντελεστών f_j, g_j. ✏

✏ **5.23.** *Ας είναι V ο γραμμικός χώρος των τμηματικά συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$ με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$. Ας είναι επίσης W ο υπόχωρος του V που παράγεται από τα διανύσματα*

$$\chi_{[0,1]}(x),\ \ \chi_{[\frac{1}{2},1]}(x).$$

Αν $f(t) = t^2+1$ είναι ένα στοιχείο του V βρείτε την ορθογώνια προβολή του στο χώρο W. ✏

✏ **5.24.** *Στο χώρο $C([0,1])$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$ βρείτε την ορθογώνια προβολή της $f(x) = e^x$ στο χώρο που παράγεται από τα διανύσματα*

$$f_1(x) = 1,\ \ f_2(x) = x.$$

✏

✏ **5.25.** *Σε ένα χώρο V με εσωτερικό γινόμενο τα διανύσματα $f_1, f_2, \cdots$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και οι (πεπερασμένοι) γραμμικοί συνδυασμοί τους είναι πυκνοί στο V. Ας είναι $e_1, e_2, \cdots$ η ορθοκανονική ακολουθία που παράγεται από τη διαδικασία Gram–Schmidt. Δείξτε ότι οι (πεπερασμένοι) γραμμικοί συνδυασμοί των e_j είναι επίσης πυκνοί στο V (ένα σύνολο διανυσμάτων λέγεται πυκνό σε ένα άλλο σύνολο αν κάθε στοιχείο του άλλου συνόλου μπορεί να προσεγγιστεί όσο καλά θέλουμε από στοιχεία του πρώτου συνόλου).* ✏

5.3.2 Η ακολουθία ορθογωνίων πολυωνύμων ως προς μια συνάρτηση βάρους σε ένα διάστημα

Με δεδομένη την τεράστια σημασία που έχουν οι χώροι πολυωνύμων $\mathcal{P}_n$ στη θεωρία προσέγγισης καταλαβαίνει εύκολα κανείς πόσο σημαντικό είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα που μας δίνει ένα απλό ρόπο να βρούμε μια ορθογώνια ακολουθία από μονικά πολυώνυμα όλων των βαθμών.

Υποθέτουμε στα παρακάτω ότι έχουμε σταθεροποιήσει ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ και μια θετική συνάρτηση βάρους $w(x)$ πάνω στο διάστημα αυτό, μέσω της οποίας ορίζεται ένα εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)\,dx$$

και η αντίστοιχη 2-νόρμα $\|f\|_2^2 = \langle f,f\rangle$.

Θεώρημα 5.6 (Η κατασκευή των ορθογωνίων πολυωνύμων) *Έστω η ακολουθία πολυωνύμων $Q_n(x)$ που ορίζεται ως εξής:*

$$Q_0(x) = 1$$

$$Q_1(x) = (x - a_0)Q_0(x) = x - a_0$$

$$Q_{n+1}(x) = (x - a_n)Q_n(x) - b_n Q_{n-1}(x) \qquad (\text{για } n \ge 1)$$

όπου

$$a_n = \frac{\langle xQ_n(x), Q_n(x)\rangle}{\langle Q_n(x), Q_n(x)\rangle}, \quad b_n = \frac{\langle xQ_n(x), Q_{n-1}(x)\rangle}{\langle Q_{n-1}(x), Q_{n-1}(x)\rangle}. \qquad (5.12)$$

Τότε $\deg Q_n = n$, το $Q_n(x)$ είναι μονικό (δηλ. $Q_n(x) = x^n + \cdots$) και τα πολυώνυμα $Q_n(x)$ είναι ανά δύο ορθογώνια. Επίσης τα πολυώνυμα $Q_n(x)$ είναι πραγματικά πολυώνυμα.

✏ **5.26.** *Αφού πρώτα υπολογίσετε και το $Q_2(x)$ αποδείξτε ότι τα πολυώνυμα Q_0, Q_1, Q_2 είναι ανά δύο ορθογώνια.* ✏

✏ **5.27.** *Αποδείξτε με επαγωγή ως προς n ότι το $Q_n(x)$ είναι μονικό, πραγματικό πολυώνυμο βαθμού n.* ✏

Αποδεικνύουμε την ορθογωνιότητα των $Q_0, \ldots, Q_n$ με επαγωγή ως προς n. Για $n = 0, 1, 2$ αυτό είναι το αντικείμενο του Προβλήματος 5.26. Αν υποθέσουμε ότι τα $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ είναι ανά δύο ορθογώνια πρέπει, για να ολοκληρώσουμε την επαγωγική απόδειξη, να δείξουμε ότι το Q_{n+1} είναι ορθογώνιο προς τα $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$. Δείχνουμε λοιπόν ότι $\langle Q_{n+1}, Q_k \rangle = 0$ για $k \le n$ διαχωρίζοντας 3 περιπτώσεις για το k.

Περίπτωση $k = n$:

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του a_n και το γεγονός (επαγωγική ως προς n υπόθεση) ότι $\langle Q_n, Q_{n-1} \rangle = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle Q_{n+1}, Q_n \rangle &= \langle (x - a_n) Q_n - b_n Q_{n-1}, Q_n \rangle \\
&= \langle x Q_n, Q_n \rangle - a_n \langle Q_n, Q_n \rangle - b_n \cancel{\langle Q_{n-1}, Q_n \rangle} \\
&= \langle x Q_n, Q_n \rangle - \frac{\langle x Q_n, Q_n \rangle}{\langle Q_n, Q_n \rangle} \langle Q_n, Q_n \rangle \\
&= \langle x Q_n, Q_n \rangle - \langle x Q_n, Q_n \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Περίπτωση $k = n - 1$:

$$\begin{aligned}
\langle Q_{n+1}, Q_{n-1} \rangle &= \langle x Q_n, Q_{n-1} \rangle - a_n \cancel{\langle Q_n, Q_{n-1} \rangle} - b_n \langle Q_{n-1}, Q_{n-1} \rangle \\
&= \langle x Q_n, Q_{n-1} \rangle - \frac{\langle x Q_n, Q_{n-1} \rangle}{\langle Q_{n-1}, Q_{n-1} \rangle} \langle Q_{n-1}, Q_{n-1} \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Περίπτωση $k < n - 1$:

$$\begin{aligned}
\langle Q_{n+1}, Q_k \rangle &= \langle x Q_n, Q_k \rangle - a_n \cancel{\langle Q_n, Q_k \rangle} - b_n \cancel{\langle Q_{n-1}, Q_k \rangle} \\
&= \langle x Q_n, Q_k \rangle \\
&= \langle Q_n, x Q_k \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε η συγκεκριμένη μορφή του εσωτερικού γινομένου η οποία συνεπάγεται την ταυτότητα

$$\langle f(x) g(x), h(x) \rangle = \langle f(x), \overline{g(x)} h(x) \rangle$$

για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g, h (το χρησιμοποιήσαμε για τη συνάρτηση $g(x) = x$). Τέλος, $\deg(x Q_k) < n$ και άρα $\langle Q_n, x Q_k \rangle =$

0 αφού το Q_n είναι ορθογώνιο (από την επαγωγική μας υπόθεση) προς όλα τα $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ άρα και προς όλους τους γραμμικούς τους συνδυασμούς που είναι όλος ο χώρος $\mathcal{P}_{n-1}$.

Η απόδειξη του Θεωρηματος 5.6 είναι πλήρης.

✏ **5.28.** *Αποδείξτε ότι $b_n > 0$ στο Θεώρημα 5.6.* ✏

✏ **5.29.** *Αν $p \in \mathcal{P}_n$ ποιοι είναι οι συντελεστές του p ως προς την ορθογώνια βάση $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ του $\mathcal{P}_n$;* ✏

✏ **5.30.** *Αν $F_0(x) = 1, F_1(x) = x + C, \cdots$ είναι μια ακολουθία μονικών ορθογωνίων πολυωνύμων με $\deg F_k = k$ τότε δείξτε ότι το $F_n(x)$ είναι το μονικό πολυώνυμο βαθμού n με την ελάχιστη L^2 νόρμα, και είναι επίσης το μοναδικό τέτοιο πολυώνυμο, και άρα η ακολουθία μονικών ορθογωνίων πολυωνύμων ως προς ένα εσωτερικό γινόμενο είναι μοναδική.* ✏

Θα δείξουμε το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα το οποίο αργότερα θα εφαρμόσουμε σε μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Θεώρημα 5.7 (Ρίζες ορθογωνίων πολυωνύμων)

Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό φραγμένο διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $w(x) > 0$ μια συνεχής συνάρτηση βάρους στο $[a, b]$. Ας είναι

$$Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x), \ldots$$

η ακολουθία μονικών ορθογωνίων πολυωνύμων για το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)\, dx.$$

Τότε για κάθε $n > 0$ το πολυώνυμο $Q_n(x)$ έχει όλες του τις ρίζες απλές και στο διάστημα (a, b).

Το Θεώρημα 5.7 είναι άμεση συνέπεια του παρακάτω Λήμματος.

Λήμμα 5.2
Με τους ορισμούς του Θεωρήματος 5.7 αν μια συνάρτηση $f \in C([a, b])$ είναι ορθογώνια προς όλα τα πολυώνυμα $p \in \mathcal{P}_{n-1}$ τότε η $f(x)$ έχει τουλάχιστον n διαφορετικές ρίζες στο (a, b).

Πράγματι, αφού το Q_n είναι ορθογώνιο προς τα

$$Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1}$$

είναι και ορθογώνιο προς κάθε γραμμικό συνδυασμό τους, δηλ. προς κάθε $p \in \mathcal{P}_{n-1}$ και, σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα, έχει n διαφορετικές ρίζες στο (a, b). Αυτές είναι όλες οι ρίζες του Q_n αφού $\deg Q_n = n$.

Για να αποδείξουμε το Λήμμα 5.2 θα χρειαστούμε την παρακάτω πρόταση.

Λήμμα 5.3
Η $f \in C([a,b])$ είναι ορθογώνια προς το $\mathcal{P}_{n-1}$ αν και μόνο αν υπάρχει $u \in C^n([a,b])$ τ.ώ. $u^{(n)} = fw$ και $u^{(k)}(a) = u^{(k)}(b) = 0$ για $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Είναι πολύ εύκολο να βρει κανείς μια συνάρτηση u της οποίας η n-οστή παράγωγος να είναι η fw. Για παράδειγμα η συνάρτηση $v(x) = \int_a^x f(t)w(t)\,dt$ ικανοποιεί $v'(x) = f(x)w(x)$ και μπορούμε να επαναλάβουμε αυτή τη διαδικασία n φορές ώστε να βρούμε μια τέτοια u. Προσθέτοντας ένα οποιοδήποτε πολυώνυμο $p \in \mathcal{P}_{n-1}$ σε αυτή τη u δεν πρόκειται να αλλάξει τη n-οστή της παράγωγο (αφού $p^{(n)} \equiv 0$) άρα έχουμε επιπλέον n βαθμούς ελευθερίας με τους οποίους εύκολα μπορούμε να ικανοποιήσουμε τις n συνοριακές συνθήκες $u^{(k)}(a) = 0$. Το σημαντικό είναι ότι μπορούμε ταυτόχρονα να ικανοποιήσουμε και τις συνοριακές συνθήκες και στο άλλο άκρο του διαστήματος, πράγμα που δε φαίνεται κατ' αρχήν δυνατό με τους βαθμούς ελευθερίας που έχουμε στη διάθεσή μας, αλλά τελικά μπορούμε να το κάνουμε λόγω της υπόθεσης της ορθογωνιότητας της f προς όλα τα στοιχεία του $\mathcal{P}_{n-1}$.

Έστω λοιπόν u μια συνάρτηση τ.ώ. $u^{(n)} = fw$ και $u^{(k)}(a) = 0$ για $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Θα δείξουμε ότι ικανοποιεί και τις άλλες συνοριακές συνθήκες $u^{(k)}(b) = 0$ για $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Θα χρειαστούμε τον παρακάτω τύπο που γενικεύει τον τύπο ολοκλήρωσης κατά μέρη:

$$\int_a^b u^{(n)}(x)v(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\, u^{(n-k)}(x)v^{(k-1)}(x)\Big|_{x=a}^{x=b} + (-1)^n \int_a^b u(x)v^{(n)}(x)\,dx. \tag{5.13}$$

✏ **5.31.** *Αποδείξτε τον τύπο (5.13) με επαγωγή ως προς n. Για $n = 1$ έχουμε το συνηθισμένο τύπο ολοκλήρωσης κατά μέρη.* ✏

Αν τώρα $p \in \mathcal{P}_{n-1}$ τότε χρησιμοποιώντας τον τύπο (5.13) και το ότι $p^{(n)} \equiv 0$ έχουμε

$$\int_a^b f\overline{p}w = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u^{(n-k)}(b)p^{(k-1)}(b). \tag{5.14}$$

Όμως οι αριθμοί $p(b), p'(b), p^{(2)}(b), \ldots, p^{(k-1)}(b)$ είναι τελείως στη διαθεσή μας όπως λέει το επόμενο Πρόβλημα.

✏ **5.32.** *Αν $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ και $b \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχει $p \in \mathcal{P}_{n-1}$ τ.ώ. $p^{(k)}(b) = a_k$, για $k = 0, 1, \ldots, n-1$.* ✏

Για να είναι λοιπόν το αριστερό μέλος της (5.14) ίσο με 0 για κάθε $p \in \mathcal{P}_{n-1}$ ο μόνος τρόπος είναι να είναι όλοι οι συντελεστές $u^{(n-k)}(b) = 0$ για $k = 1, \ldots, n$. Με άλλα λόγια πρέπει και αρκεί $u^{(k)}(b) = 0$ για $k = 0, 1, \ldots, n-1$, και η απόδειξη του Λήμματος 5.3 είναι πλήρης.

Επανερχόμαστε τώρα στην απόδειξη του Λήμματος 5.2. Ας είναι $f \in C([a,b])$ ορθογώνια προς το $\mathcal{P}_{n-1}$ (δηλ. ορθογώνιο προς όλες τα στοιχεία του $\mathcal{P}_{n-1}$). Από το Λήμμα 5.3 έχουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $u \in C^n([a,b])$ τ.ώ. $fw = u^{(n)}$ και όλες οι παράγωγοι της u τάξης μικρότερης του n μηδενίζονται στα άκρα του διαστήματος. Αφού $u(a) = u(b)$ από το θεώρημα του Rolle έχουμε ότι η u' έχει κάποια ρίζα στο διάστημα (a,b). Αφού η u' μηδενίζεται στα δύο άκρα και σε ένα ενδιάμεσο σημείο προκύπτει, και πάλι από το θεώρημα του Rolle ότι η $u^{(2)}$ έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο (a,b). Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο, εφαρμόζοντας δηλ. συνεχώς το θεώρημα του Rolle ώστε να «κερδίζουμε» από μια επιπλέον ρίζα κάθε φορά που ανεβάζουμε την τάξη της παραγώγου της u, καταλήγουμε τελικά ότι η $u^{(n)}$ έχει n διαφορετικές ρίζες στο (a,b). Η απόδειξη του Λήμματος 5.2 είναι πλήρης και άρα το Θεώρημα 5.7 έχει επίσης αποδειχτεί πλήρως.

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου

[1] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Cambridge University Press, 2004.

[2] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Fourier analysis: an introduction*. Vol. 1. Princeton University Press, 2011.

[3] Antoni Zygmund. *Trigonometric series*. Cambridge University Press, 2002.

Κεφάλαιο 6

Σύγκλιση των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier

Κύριες βιβλιογραφικές αναφορές για αυτό το Κεφάλαιο είναι οι Zygmund 2002, Katznelson 2004 και Stein and Shakarchi 2011.

6.1 Όχι σύγκλιση σε κάποιο σημείο

Θα εξετάσουμε το ερώτημα του κατά πόσο μπορούμε να περιμένουμε τη σύγκλιση της σειράς Fourier μιας συνάρτησης $f(x)$ σε ένα σημείο x_0 στην τιμή $f(x_0)$. Φυσικά υπάρχουν περιπτώσεις όπου αυτό είναι εξασφαλισμένο, για παράδειγμα όταν η συνάρτηση είναι συνεχής και η σειρά συγκλίνει απόλυτα

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right| < \infty$$

(δείτε Πόρισμα 4.2), συνθήκη η οποία ισχύει όταν, π.χ. $f \in C^2(\mathbb{T})$, αφού σε αυτή την περίπτωση εύκολα βλέπουμε ότι

$$\left|\widehat{f}(n)\right| = O(1/n^2).$$

Όμως θα θέλαμε να εξετάσουμε το ερώτημα της κατά σημείο σύγκλισης με όσο το δυνατό λιγότερες προϋποθέσεις για τη συνάρτηση f γίνεται.

Το να υποθέσουμε μόνο ότι $f \in L^1(\mathbb{T})$ (η γενικότερη περίπτωση για την οποία μπορούμε να μιλάμε για συντελεστές και σειρά Fourier) είναι πολύ λίγο, αφού δύο συναρτήσεις $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ οι οποίες διαφέρουν σε ένα σύνολο μέτρου 0 έχουν την ίδια σειρά Fourier και δε μπορεί φυσικά αυτή η σειρά να συγκλίνει και στο $f(x_0)$ και στο $g(x_0)$, όταν το x_0 ανήκει σε αυτό το σύνολο μέτρου 0 στο οποίο οι f και g διαφέρουν. Θα πρέπει λοιπόν η τιμή της συνάρτησης σε ένα οποιοδήποτε σημείο να είναι συνάρτηση των συντελεστών Fourier της συνάρτησης και ο γενικότερος φυσιολογικός χώρος όπου αυτό ισχύει (από το θεώρημα της μοναδικότητας) είναι ο χώρος $C(\mathbb{T})$ των συνεχών 2π-περιοδικών συναρτήσεων.

Έστω λοιπόν $f \in C(\mathbb{T})$ και $x_0 = [0, 2\pi)$. Ισχύει αναγκαστικά ότι $S_N(f)(x_0) \to f(x_0)$ για $N \to \infty$; Η απάντηση είναι αρνητική.

Θεώρημα 6.1
Για κάθε $x_0 \in [0, 2\pi]$ υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τ.ώ. τα μερικά αθροίσματα $S_N(f)(x_0)$ δε συγκλίνουν.

Θα δούμε ότι αυτό είναι συνέπεια ουσιαστικά του γεγονότος ότι ο πυρήνας του Dirichlet D_N δεν έχει φραγμένη L^1-νόρμα (για $N \to \infty$).

Λήμμα 6.1
Ισχύει $\|D_N\|_1 \ge C \log N$ για κάποια σταθερά $C > 0$.

Απόδειξη.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (4.14)

$$D_N(x) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}. \tag{6.1}$$

Δείτε και το Σχήμα 4.3 για καλύτερη εποπτεία. Παρατηρούμε πρώτα ότι η $D_N(x)$ μηδενίζεται (και αλλάζει πρόσημο) στο διάστημα $[0, \pi]$ στα σημεία $x_k = 2k\pi/(2N+1)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, που απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με

$$\ell = \frac{2\pi}{2N+1}.$$

Ο αριθμητής του κλάσματος (6.1) είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $\frac{2}{2N+1}$ και συνεπώς στο μεσαίο ένα τρίτο του κάθε διαστήματος $[x_k, x_{k+1}]$ ο αριθμητής φράσσεται κάτω κατ' απόλυτο τιμή από μια σταθερά $A = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Έχουμε, χρησιμοποιώντας και την ανισότητα $|\sin x| \le x$ για $x \ge 0$,

$$\begin{aligned}
\|D_N\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} |D_N(x)|\,dx \\
&\ge \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\pi} \int_{x_k+(\ell/3)}^{x_k+(2\ell/3)} \frac{2A}{x}\,dx \\
&\ge \frac{2A\ell}{3\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{x_k} \\
&= \frac{2A\ell}{3\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2N+1}{2\pi} \frac{1}{k} \\
&= \frac{A\ell(2N+1)}{3\pi^2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} \\
&\ge C \log N,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ότι $\ell(2N+1) = 2\pi$ και ότι $\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} \geq C_1 \log N$, όπου $C_1 > 0$ μια σταθερά. (Την τελευταία εκτίμηση μπορεί κανείς να πάρει συγκρίνοντας το άθροισμα με το αντίστοιχο ολοκλήρωμα. Ισχύει παρόμοια εκτίμηση προς τα πάνω αλλά δεν τη χρειαζόμαστε εδώ.) ∎

Γιατί όμως το Λήμμα 6.1 έχει ως συνέπεια, όπως προαναφέραμε, τη μη αναγκαστική σύγκλιση της σειράς Fourier; Κάνουμε κατ' αρχήν, για απλότητα, την επιλογή $x_0 = 0$, και έπειτα παρατηρούμε ότι η απεικόνιση

$$T_N : f \to S_N(f)(0)$$

είναι μια γραμμική απεικόνιση από το χώρο $C(\mathbb{T})$ (στον οποίο ενδιαφερόμαστε να δουλέψουμε) στο $\mathbb{C}$. Τέτοιες απεικονίσεις ονομάζονται *γραμμικά συναρτησοειδή* και είναι πολύ σημαντικά σε ολόκληρη τη Μαθηματική Ανάλυση. Η γραμμικότητα είναι απλά η ιδιότητα $T_N(\lambda f + \mu g) = \lambda T_N(f) + \mu T_N(g)$, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $f, g \in C(\mathbb{T})$.

Οι δύο χώροι $C(\mathbb{T})$ και $\mathbb{C}$ είναι εφοδιασμένοι με μετρική (νόρμα) την L^∞ μετρική για τον πρώτο και τη συνηθισμένη Ευκλείδια μετρική (απόλυτη τιμή) για το μιγαδικό επίπεδο. Εύκολα προκύπτει ότι ένα γραμμικό συναρτησοειδές T είναι συνεχής συνάρτηση (ως προς τις δύο μετρικές) αν και μόνο αν είναι συνεχής στο 0, το οποίο συμβαίνει αν και μόνο αν αυτό είναι *φραγμένο*, ισχύει δηλ. για κάποια πεπερασμένη σταθερά M η ανισότητα

$$|T(f)| \leq M\|f\|_\infty, \quad \text{για κάθε } f \in C(\mathbb{T}).$$

Ορισμός 6.1
Νόρμα *ονομάζουμε μια απεικόνιση ϕ από ένα γραμμικό χώρο X στους μη αρνητικούς πραγματικούς αν*

1. *$\phi(\lambda x) = |\lambda|\phi(x)$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ ή $\lambda \in \mathbb{R}$,*

2. *$\phi(x + y) \leq \phi(x) + \phi(y)$, για κάθε $x, y \in X$,*

3. *$\phi(x) = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.*

Συνήθως αντί να γράφουμε $\phi(x)$ γράφουμε $\|x\|$.

Κάθε νόρμα ορίζει μια μετρική στο χώρο X, τη μετρική $d(x, y) = \|x - y\|$ (η τριγωνική ανισότητα για την d είναι στην ουσία το 2 στις ιδιότητες της νόρμας παραπάνω).

✏ **6.1.** *(Φραγμένος Γραμμικός Τελεστής) Αποδείξτε τον ισχυρισμό της παραγράφου πριν τον Ορισμό 6.1: Αν $T : X \to Y$ είναι μια γραμμική απεικόνιση από ένα γραμμικό χώρο με νόρμα X σε ένα γραμμικό χώρο με νόρμα Y τότε η απεικόνιση T είναι συνεχής σε όλο το X αν και μόνο αν είναι συνεχής στο $0 \in X$ το οποίο συμβαίνει αν και μόνο αν υπάρχει μια πεπερασμένη σταθερά M τέτοια ώστε*

$$\|Tx\| \leq M\|x\|, \quad \text{για κάθε } x \in X.$$

✏

Για ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές T το infimum των αριθμών M για τους οποίους ισχύει η παραπάνω ανισότητα συμβολίζεται με $\|T\|$ και ονομάζεται νόρμα του γραμμικού συναρτησοειδούς (και μπορούμε στη θέση του M στην παραπάνω ανισότητα να πάρουμε τη νόρμα $\|T\|$). Το σύνολο των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών πάνω σε ένα χώρο με νόρμα, όπως ο $C(\mathbb{T})$ που εξετάζουμε εδώ, είναι γραμμικός χώρος και η ποσότητα $\|T\|$ είναι μια νόρμα πάνω στο γραμμικό αυτό χώρο. Άρα η ποσότητα $\|T_1 - T_2\|$ είναι μια μετρική πάνω στο χώρο των συναρτησοειδών.

✏ **6.2.** *Ας είναι T μια φραγμένη γραμμική απεικόνιση από ένα χώρο με νόρμα X σε ένα χώρο με νόρμα Y (ένας γραμμικός τελεστής όπως συνήθως ονομάζετα, εκτός αν Y είναι το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$ οπότε το ονομάζουμε* γραμμικό συναρτησοειδές*). Αποδείξτε ότι η νόρμα του T όπως ορίστηκε παραπάνω*

$$\|T\| = \inf\{M : \ \forall x \in X : \ \|Tx\| \le M\|x\|\}$$

ικανοποιεί τις ιδιότητες του Ορισμού 6.1. ✏

Το πολύ σημαντικό θεώρημα που θα χρησιμοποιήσουμε για να δείξουμε τη μη (αναγκαστική) σύγκλιση των $S_N(f)(0)$ στο $f(0)$ όταν η μόνη υπόθεση για την f είναι ότι $f \in C(\mathbb{T})$, είναι το Θεώρημα Banach-Steinhaus ή Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος, το οποίο διατυπώνουμε εδώ μόνο για τους χώρους που μας ενδιαφέρει. Για την απόδειξη παραπέμπουμε σε οποιοδήποτε καλό βιβλίο Συναρτησιακής Ανάλυσης.

Θεώρημα 6.2 (Banach-Steinhaus)
Αν $T_N : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ είναι μια ακολουθία φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών τότε η ακολουθία των νορμών των συναρτησοειδών, $\|T_N\|$, είναι φραγμένη αν και μόνο αν για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ η ακολουθία $T_N(f) \in \mathbb{C}$ είναι φραγμένη.

Το ίδιο ισχύει και αν το πεδίο τιμών των T_N δεν είναι οι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί αλλα οποιοσδήποτε γραμμικός χώρος με νόρμα Y, και το πεδίο ορισμού των T_N είναι οποιοσδήποτε πλήρης γραμμικός χώρος με νόρμα X (ένας χώρος Banach όπως λέμε): αν για κάθε $f \in X$ ισχύει

$$\sup_N \|T_N(f)\|_Y < \infty$$

τότε υπάρχει $M < \infty$ ώστε για κάθε $f \in X$ να ισχύει

$$\|T_N f\|_Y \le M\|f\|_X.$$

Αν $\|T_N\| \le M < \infty$ τότε είναι φανερό ότι

$$|T_N(f)| \le \|T_N\|\|f\|_\infty \le M\|f\|_\infty$$

και αυτή είναι η τετριμμένη κατεύθυνση του Θεωρήματος 6.2. Η σημαντική κατεύθυνση, την οποία και θα χρησιμοποιήσουμε εδώ, είναι η αντίστροφη, ότι δηλ. αν οι νόρμες $\|T_N\|$ δεν είναι φραγμένες τότε σίγουρα υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ για το οποίο η ακολουθία $|T_N(f)|$ δεν είναι φραγμένη, και συνεπώς η ακολουθία

$T_N(f)$ δε μπορεί και να συγκλίνει σε κάποιο μιγαδικό αριθμό. Επειδή θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 6.2 για τα συναρτησοειδή

$$T_N(f) = S_N(f)(0)$$

προκύπτει άμεσα ως συμπέρασμα η ύπαρξη συνεχούς συνάρτησης f της οποίας τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier δε συγκλίνουν στο 0 (όχι μόνο δε συγκλίνουν στο $f(0)$ αλλά δε συγκλίνουν πουθενά).

Απομένει λοιπόν να δείξουμε ότι οι νόρμες των T_N δεν είναι φραγμένες. Θυμόμαστε τώρα ότι

$$T_N(f) = S_N(f)(0) = f * D_N(0) = \int D_N(x) f(x)\, dx$$

και το ζητούμενο έπεται από το Λήμμα 6.1 και το Πρόβλημα 6.3 που ακολουθεί.

✏ **6.3.** *Αν η συνάρτηση $D \in C(\mathbb{T})$ έχει πεπερασμένο πλήθος από μηδενικά στο $[0, 2\pi]$ τότε η νόρμα του συναρτησοειδούς T που απεικονίζει*

$$f \to \int D(x) f(x)\, dx$$

ισούται με $\|D\|_1 = \int |D|$.

💡 *Η ανισότητα $\|T\| \le \int |D|$ έπεται από την προφανή ανισότητα $\left|\int Df\right| \le \|f\|_\infty \int |D|$. Απομένει να δείξει κανείς ότι ισχύει $\left|\int Df\right| \ge (1-\epsilon)\int |D|$ για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάποια συνεχή f με $|f| \le 1$. Αν μπορούσαμε να πάρουμε $f(x) = \operatorname{sgn} D(x)$ ($\operatorname{sgn} x$ είναι $+1$ αν $x > 0$, -1 αν $x < 0$ και 0 αν $x = 0$) θα είχαμε την ανισότητα αυτή ακόμη και με $\epsilon = 0$ αλλά μια τέτοια συνάρτηση είναι ασυνεχής εν γένει και άρα δεν είναι επιτρεπτή στον έλεγχο της νόρμας του συναρτησοειδούς. Μπορούμε όμως να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση αυτή με μια συνεχή συνάρτηση φραγμένη από το 1 με τρόπο ώστε να μην επηρεάζουμε το ολοκλήρωμα $\int Df$ παρά ελάχιστα.* ✏

Η απόδειξη του Θεωρήματος 6.1 είναι πλήρης με το Πρόβλημα 6.3.

Θα ασχοληθούμε τώρα με το κατά πόσον

$$S_N(f) \to f$$

όταν η σύγκλιση δεν είναι κατά σημείο, περίπτωση την οποία εξετάσαμε στην §6, αλλά κατά νόρμα. Εξετάζουμε δηλ. αν ισχύει

$$\|S_N(f) - f\| \to 0,$$

όταν στη θέση της νόρμας $\|\cdot\|$ είναι μια από τις γνωστές μας L^p νόρμες και η f ανήκει σε ένα αντίστοιχο L^p χώρο.

6.2 Όχι σύγκλιση κατά L^∞

Η πρώτη περίπτωση που θα κοιτάξουμε είναι η περίπτωση που $f \in C(\mathbb{T})$ και η νόρμα είναι η $\|\cdot\|_\infty$. Το ερώτημα, με άλλα λόγια, είναι αν η σειρά Fourier μιας συνεχούς συνάρτησης συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση. Γνωρίζοντας ότι δεν ισχύει κατ' ανάγκη ούτε η κατά σημείο σύγκλιση, είναι φανερό ότι η απάντηση είναι όχι. Αξίζει ίσως να επαναλάβουμε την απόδειξη χωρίς αναφορά στην κατά σημείο σύγκλιση.

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $\|S_N(f) - f\|_\infty \to 0$ για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$, τότε οι τελεστές

$$S_N : C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$$

είναι φραγμένοι κατά σημείο, ισχύει δηλαδή για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$:

$$\sup_N \|S_N(f)\|_\infty < \infty$$

αφού ισχύει $\|S_N(f)\|_\infty \to \|f\|_\infty$ (αποδείξτε το αυτό). Από το Θεώρημα Banach-Steinhaus (Θεώρημα 6.2) προκύπτει τότε ότι οι τελεστές S_N είναι ομοιόμορφα φραγμένοι, υπάρχει δηλ. $M < \infty$ τ.ώ. να ισχύει

$$\|S_N(f)\|_\infty \le M\|f\|_\infty, \quad \text{για κάθε } f \in C(\mathbb{T}) \text{ και για κάθε } N. \tag{6.2}$$

Από το Πρόβλημα 6.3 όμως και το Λήμμα 6.1 προκύπτει ότι για κάθε N υπάρχει συνάρτηση $f_N \in C(\mathbb{T})$, με $\|f_N\|_\infty \le 1$ (μια συνεχής συνάρτηση που «προσεγγίζει» τη συνάρτηση $\operatorname{sgn} D_N(x)$), τ.ώ.

$$S_N(f_N)(0) = f_N * D_N(0) = \int f_N D_N \ge C \log N$$

όπου $C > 0$ μια σταθερά (της οποίας η τιμή δεν έχει καμία σημασία για το πρόβλημα που εξετάζουμε). Άρα $\|S_N(f_N)\|_\infty \ge |S_N(f_N)(0)| \ge C \log N$, το οποίο αντιφάσκει με την υπόθεση (6.2).

✏ **6.4.** *Γιατί δεν εξετάζουμε καθόλου το ερώτημα αν συγκλίνει στην L^∞ νόρμα η ακολουθία $S_N(f)$ στην f για κάθε $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ αλλά περιορίζουμε αμέσως την f να είναι συνεχής;* ✏

6.3 Όχι σύγκλιση κατά L^1

Δείχνουμε τώρα ότι δεν ισχύει απαραίτητα ούτε

$$\|S_N(f) - f\|_1 \to 0$$

για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Πράγματι, αν ίσχυε κάτι τέτοιο, όπως και στην περίπτωση της σύγκλισης κατά L^∞, θα είχαμε ότι για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ η ακολουθία $\|S_N(f)\|_1$ είναι φραγμένη και άρα από το Θεώρημα Banach-Steinhaus (Θεώρημα 6.2) θα υπήρχε $M < \infty$ τ.ώ. να ισχύει

$$\|S_N(f)\|_1 \le M\|f\|_1, \quad \text{για κάθε } f \in L^1(\mathbb{T}) \text{ και για κάθε } N. \tag{6.3}$$

Παίρνοντας όμως $f = K_n$ να είναι ένας πυρήνας του Fejér με μεγάλο n (πολύ μεγαλύτερο του N) έχουμε εύκολα ότι η συνάρτηση $S_N(K_n)$ είναι πολύ κοντά στον πυρήνα του Dirichlet D_N. Πράγματι και οι δύο συναρτήσεις $S_N(K_n)$ και D_N είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα βαθμού N και οι συντελεστές Fourier της $S_N(K_n)$ συγκλίνουν σε αυτούς της D_N για $n \to \infty$. Αυτό αρκεί για να δείξει ότι $\|S_N(K_n) - D_N\|_\infty \to 0$ για $n \to \infty$ το οποίο συνεπάγεται ότι $\|S_N(K_n) - D_N\|_1 \to 0$ για $n \to \infty$ και άρα ότι

$$\|S_N(K_n)\|_1 \to \|D_N\|_1 \geq C \log N, \quad \text{για } n \to \infty.$$

✏ **6.5.** *Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες στον προηγούμενο ισχυρισμό και δείξτε ότι για κάθε N ισχύει ότι*

$$\|S_N(K_n) - D_N\|_\infty \to 0$$

για $n \to \infty$. ✏

Επειδή όμως $\|K_n\|_1 = 1$ αυτό το κάτω φράγμα αντιφάσκει με την (6.3) αφού η ποσότητα $C \log N$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλη.

✏ **6.6.** *Σκοπός αυτού του Προβλήματος είναι να αποδείξουμε ότι δε συγκλίνει κατ' ανάγκη η $S_N(f)$ στην f κατά L^1 για όλες τις $f \in L^1(\mathbb{T})$, χωρίς χρήση του Θεωρήματος Banach-Steinhaus.*

Έστω

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} K_{N_j}(x)$$

όπου N_j είναι μια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και K_M δηλώνει τον πυρήνα του Fejér βαθμού M. Δείξτε ότι $f \in L^1(\mathbb{T})$ όποια και να είναι η ακολουθία $N_1 < N_2 < \ldots$ και ότι αν αυτή η ακολουθία αυξάνει αρκετά γρήγορα τότε η ακολουθία $S_N(f)$ δε συγκλίνει στην f στην L^1 νόρμα.

💡 *Αν η ακολουθία N_j αυξάνει αρκετά γρήγορα τότε για άπειρες τιμές του N μπορούμε να πετύχουμε να υπάρχει ένας μόνο από τους όρους*

$$\left\|2^{-j} S_N(K_{N_j})\right\|_1$$

ο οποίος να είναι (α) μεγάλος και (β) μεγαλύτερος από όλους τους άλλους μαζί. ✏

6.4 Σύγκλιση κατά L^2

Από τη θεωρία L^2 που έχουμε δει εύκολα προκύπτει ότι στην περίπτωση του χώρου $L^2(\mathbb{T})$ η απάντηση είναι καταφατική: $\|S_N(f) - f\|_2 \to 0$ για κάθε $f \in L^2(\mathbb{T})$. Αυτό αποδεικνύεται πολύ εύκολα χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Parseval (Θεώρημα 5.2):

$$\|S_N(f) - f\|_2^2 = \sum_k \left|(S_N(f) - f)^\wedge(k)\right|^2$$

$$= \sum_{|k|>N} \left|\widehat{f}(k)\right|^2$$

$$\to 0 \quad \text{για } N \to \infty$$

αφού η σειρά $\sum_k \left|\widehat{f}(k)\right|^2$ είναι συγκλίνουσα.

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη το γεγονός ότι έχουμε σύγκλιση κατά νόρμα και στην περίπτωση των χώρων $L^p(\mathbb{T})$ με $1 < p < \infty$. Με αυτά που έχουμε δείξει μέχρι στιγμής δε μπορούμε να δείξουμε αυτό το αποτέλεσμα.

6.5 Αρχή τοπικότητας

Θεώρημα 6.3
Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ τ.ώ. υπάρχει η παράγωγος $f'(\theta_0)$. Τότε τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της f συγκλίνουν στην f στο θ_0

$$S_N(f)(\theta_0) \to f(\theta_0), \quad \text{για } N \to \infty.$$

Απόδειξη.
Ορίζουμε

$$F(t) = \begin{cases} \frac{f(\theta_0 - t) - f(\theta_0)}{t} & (0 < |t| < \pi) \\ -f'(\theta_0) & (t = 0). \end{cases}$$

Η συνάρτηση F είναι φραγμένη κοντά στο 0 και ολοκληρώσιμη στο χωρίο $|t| > \delta$, για κάθε θετικό δ, άρα $F \in L^1(\mathbb{T})$. Έχουμε επίσης

$$S_N(f)(\theta_0) - f(\theta_0) = f * D_N(\theta_0) - f(\theta_0)$$

$$= \int (f(\theta_0 - t) - f(\theta_0)) D_N(t)\, dt$$

$$(\text{αφού} \int D_N = 1)$$

$$= \int F(t) \cdot t \cdot D_N(t)\, dt.$$

Αλλά

$$tD_N(t) = \frac{t}{\sin\frac{t}{2}} \sin\left(N + \frac{1}{2}\right) t$$

$$(\text{από την } (4.14))$$

$$= \frac{t}{\sin\frac{t}{2}} \left(\sin Nt \cos\frac{t}{2} + \cos Nt \sin\frac{t}{2}\right).$$

Άρα

$$S_N(f)(\theta_0) - f(\theta_0) = \int \left(F(t)\frac{t}{\sin(t/2)}\cos(t/2)\right) \sin Nt\, dt$$

$$+ \int (F(t)t) \cos Nt\, dt,$$

και καθένα από τα δύο αυτά ολοκληρώματα είναι της μορφής $\int g(t) \sin Nt\, dt$ ή $\int g(t) \cos Nt\, dt$ με $g \in L^1(\mathbb{T})$, άρα συγκλίνει στο 0 από το Λήμμα Riemann-Lebesgue (Θεώρημα 6.6). ∎

Παρατήρηση 6.1
Με την ίδια απόδειξη του Θεωρήματος 6.3 έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα αν αντί για παραγωγισιμότητα της f στο θ_0 υποθέσουμε απλά ότι ισχύει στο θ_0 μια συνθήκη Lipschitz: υπάρχει δηλ. $\delta > 0$ τ.ώ.

$$|f(\theta) - f(\theta_0)| \le M|\theta - \theta_0|, \quad \text{για κάθε } \theta \in (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta). \tag{6.4}$$

✏ **6.7.** *Αποδείξτε ότι αν $f'(\theta_0)$ υπάρχει τότε ισχύει η (6.4) για κάποια $M, \delta > 0$.* ✏

Πόρισμα 6.1 (Αρχή τοπικότητας)
Αν $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ και οι f, g ταυτίζονται σε ένα ανοιχτό διάστημα I τότε για κάθε $\theta_0 \in I$ ισχύει η ισοδυναμία

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(\theta_0) = f(\theta_0) \Longleftrightarrow \lim_{N\to\infty} S_N(g)(\theta_0) = g(\theta_0). \tag{6.5}$$

Δεν εξαρτάται δηλ. η σύγκλιση της $S_N(f)(x)$ παρά μόνο από τις τιμές της f σε μια οσοδήποτε μικρή γειτονιά του x.

Απόδειξη.
Η $f - g$ είναι ολοκληρώσιμη και ταυτοτικά 0 στο I, άρα και παραγωγίσιμη στο $\theta_0 \in I$. Από το Θεώρημα 6.3 προκύπτει ότι $S_N(f-g)(\theta_0) \to 0$ και η ισοδυναμία (6.5) προκύπτει από την ισότητα $S_N(f)(\theta_0) = S_N(g)(\theta_0) + S_N(f-g)(\theta_0)$. ∎

Αν μια L^1 συνάρτηση f ικανοποιεί την (6.4) τότε, και μόνο τότε, η συνάρτηση $\frac{1}{t}(f(\theta_0 - t) - f(\theta_0))$ είναι φραγμένη σε μια περιοχή του μηδενός. Το επόμενο αποτέλεσμα μας λέει ότι ουσιαστικά αρκεί η ολοκληρωσιμότητα αυτής της συνάρτησης, που είναι βέβαια μια γενικότερη ιδιότητα.

Θεώρημα 6.4 (Το κριτήριο του Dini)
Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\int \left|\frac{1}{t}(f(\theta_0 + t) - f(\theta_0))\right| dt < \infty$ τότε

$$S_N(f)(\theta_0) \to f(\theta_0).$$

Απόδειξη.
Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να προσθέσουμε μια σταθερά στην f, την $-f(\theta_0)$, και να μεταφέρουμε το θ_0 στο 0, ώστε η συνθήκη μας να γίνει $\int \left|\frac{f(t)}{t}\right| dt < \infty$, $f(0) = 0$, και θέλουμε να αποδείξουμε ότι $S_N(f)(0) \to 0$.

Έχουμε

$$S_N(f)(0) = \int f(t) D_N(t)\, dt$$

$$= \int \frac{f(t)}{\sin(t/2)} \sin(N + \frac{1}{2})t\, dt$$

(από την (4.14))

$$= \int g(t) \sin(N + \frac{1}{2})t \, dt$$

(όπου θέσαμε $g(t) = f(t)/\sin(t/2) \in L^1(\mathbb{T})$ από την υπόθεσή μας)

$$= \int g(t)(\sin(t/2) \cos Nt + \cos(t/2) \sin Nt) \, dt$$

$$= \int f(t) \cos Nt \, dt + \int [g(t) \cos(t/2)] \sin Nt \, dt,$$

και από το Λήμμα Riemann-Lebesgue (Θεώρημα 6.6) έχουμε ότι και τα δύο ολοκληρώματα τείνουν στο 0. ∎

6.6 Άλλες συνθήκες που εγγυώνται σύγκλιση κατά σημείο

Η σύγκλιση των Cesáro μέσων της f στην ίδια την f είναι εξασφαλισμένη απλά και μόνο από τη συνέχεια της f από το Θεώρημα του Fejér (Θεώρημα 4.7). Το επόμενο θεώρημα μας συνδέει, υπό συνθήκες, τη σύγκλιση των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier με τη σύγκλιση των Cesáro μέσων.

Θεώρημα 6.5 (Hardy)
Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\left|\widehat{f}(n)\right| = O(1/n)$ τότε οι ακολουθίες $S_N(f)(x)$ και $\sigma_N(f)(x)$ συγκλίνουν για τα ίδια x και στο ίδιο όριο. Αν η $\sigma_N(f)(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $x \in E$ το ίδιο κάνει και η $S_N(f)(x)$ (εδώ $E \subseteq [0, 2\pi)$ είναι ένα οποιοδήποτε μετρήσιμο σύνολο).

Απόδειξη.
Από το Θεώρημα 4.6 έχουμε ότι οποτεδήποτε $S_N(f)(x) \to \alpha$ τότε και $\sigma_N(f)(x) \to \alpha$ αφού η ακολουθία $\sigma_N(f)(x)$ αποτελείται από τους αριθμητικούς μέσους της ακολουθιας $S_N(f)(x)$. Άρα αρκεί να υποθέσουμε ότι $\sigma_N(f)(x) \to \alpha$ και να αποδείξουμε από αυτό ότι $S_N(f)(x) \to \alpha$.

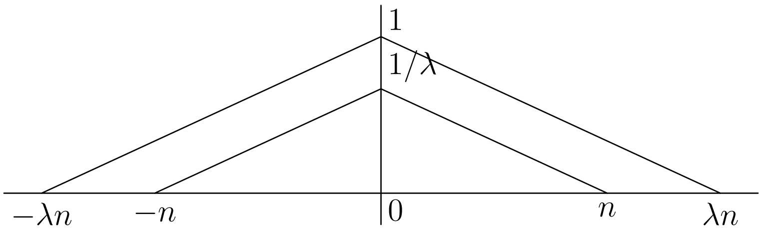
Η συνθήκη $\left|\widehat{f}(n)\right| = O(1/n)$ συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\lambda > 1$ τ.ώ. να ισχύει

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{n \le |j| \le \lambda n} \left|\widehat{f}(j)\right| < \epsilon. \tag{6.6}$$

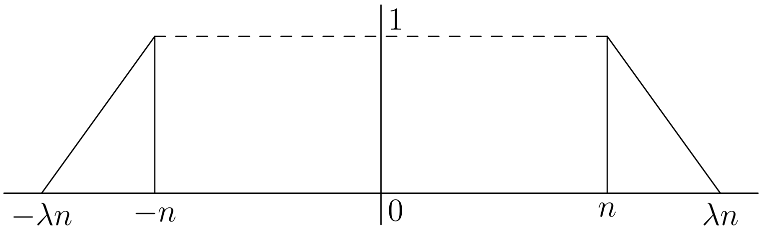
✏ **6.8.** *Αποδείξτε τον προηγούμενο ισχυρισμό.*
💡*Αρκεί να το δείξετε με $1/|j|$ στη θέση της ακολουθίας $\left|\widehat{f}(j)\right|$. Εκτιμήστε τώρα το άθροισμα με ολοκλήρωμα.* ✏

Ισχύει τώρα η ταυτότητα (υποθέστε για απλότητα ότι λn είναι ακέραιος; δεν αλλάζει τίποτε ουσιαστικό αν δεν είναι και περιπλέκεται πολύ το γράφιμο)

$$K_{\lambda n}(x) - \frac{1}{\lambda} K_n(x) = (1 - \frac{1}{\lambda}) D_n(x) + (1 - \frac{1}{\lambda}) G_n(x) \tag{6.7}$$



Σχήμα 6.1: Οι συντελεστές Fourier των πυρήνων του Fejér $K_{\lambda n}$ και K_n



Σχήμα 6.2: Οι συντελεστές Fourier της $G_n(x)$

όπου

$$G_n(x) = \sum_{n \le k \le \lambda n} \left(1 - \frac{k-n}{(\lambda-1)n}\right)(e^{ikx} + e^{-ikx})$$

(οι συντελεστές Fourier της $G_n(x)$ φαίνονται στο Σχήμα 6.2). Η ταυτότητα (6.7) μπορεί πολύ εύκολα να αποδειχτεί με αναφορά στο Σχήμα 6.1 όπου φαίνονται οι συντελεστές Fourier των πυρήνων του Fejér που εμφανίζονται στο αριστερό μέλος.

Παίρνοντας συνέλιξη με την f η ταυτότητα (6.7) μας δίνει την

$$S_n(f)(x) = \frac{\lambda}{\lambda-1}\sigma_{\lambda n}(f)(x) - \frac{1}{\lambda-1}\sigma_n(f)(x) - f * G_n(x). \quad (6.8)$$

Έχουμε

$$f * G_n(x) = \sum_{n \le |j| \le \lambda n} \widehat{f}(j)\widehat{G_n}(j)e^{ijx}$$

άρα, αφού $\left|\widehat{G_n}(j)\right| \le 1$,

$$|f * G_n(x)| \le \sum_{n \le |j| \le \lambda n} \left|\widehat{f}(j)\right| \le \epsilon,$$

αρκεί το n να είναι αρκετά μεγάλο. Αν τώρα υποθέσουμε ότι $\sigma_n(x) \to \alpha$ (και άρα και ότι $\sigma_{\lambda n}(x) \to \alpha$) προκύπτει από την (6.8) ότι $\limsup S_n(f)(x) \le \alpha + \epsilon$ και $\liminf S_n(f)(x) \ge \alpha - \epsilon$. Αφού το ϵ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός προκύπτει ότι

$$\lim S_n(f)(x) = \alpha.$$

∎

✏ **6.9.** *Συμπληρώστε την απόδειξη του Θεωρήματος 6.5. Βεβαιωθείτε ότι η προηγούμενη απόδειξη δίνει και την ομοιόμορφη σύγκλιση στο E της $S_n(f)(x)$ αν υποθέσουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση στο E της $\sigma_n(f)(x)$.* ✏

Πόρισμα 6.2
Αν $f \in C^1(\mathbb{T})$ τότε $S_N(f)(x) \to f(x)$ ομοιόμορφα.

Απόδειξη.
Ισχύει $\left|\widehat{f}(n)\right| \le \frac{\|f'\|_1}{|n|} = O(1/|n|)$ λόγω της παραγωγισιμότητας της f (αφού $\widehat{f}(n) = \widehat{f'}(n)/(in)$ και $\left|\widehat{f'}(n)\right| \le \|f'\|_1$) άρα από το Θεώρημα 6.5 η $S_N(f)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αφού η $\sigma_N(f)$ συγκλίνει στην f ομοιόμορφα. ∎

Το Πόρισμα 6.2 είναι επίσης συνέπεια του αποτελέσματος του Προβλήματος 5.11: κάθε C^1 συνάρτηση έχει σειρά Fourier που είναι απολύτως συγκλίνουσα, άρα και ομοιόμορφα συγκλίνουσα.

6.7 Ρυθμός μείωσης των συντελεστών Fourier

Το πρώτο και βασικότερο αποτέλεσμα που αφορά τους συντελεστές Fourier μιας L^1 συνάρτησης είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 6.6 (Λήμμα Riemann-Lebesgue)
Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ τότε $\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}(k) = 0$.

Μια απόδειξη αυτού έχουμε περιγράψει στο Πρόβλημα 1.35. Με αυτά που έχουμε μάθει μέχρι τώρα μια άλλη απόδειξη προκύπτει για τους παρακάτω λόγους: (α) σίγουρα ισχύει για τριγωνομετρικά πολυώνυμα (η ακολουθία των συντελεστών Fourier τους όχι μόνο συγκλίνει στο 0 αλλά είναι και τελικά ίση με μηδέν) (β) τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στο χώρο $L^1(\mathbb{T})$ (Πρόβλημα 4.11) και (γ) οι συντελεστές Fourier μιας συνάρτησης φράσσονται από την L^1 νόρμα της συνάρτησης. (Αυτή η απόδειξη είναι κάπως διαφορετική από αυτή που δίνεται στις σημειώσεις για το ολοκλήρωμα Lebesgue όπου δε χρησιμοποιείται το θεώρημα του Fejér ούτε τριγωνομετρικά πολυώνυμα αλλά μόνο η πυκνότητα των συνεχών συναρτήσεων στο L^1.)

Γενικά όσο πιο «ομαλή» είναι μια συνάρτηση (όσο πιο «συνεχής», όσο πιο παραγωγίσιμη, κλπ) τόσο πιο γρήγορα φθίνουν οι συντελεστές Fourier της. Τα αποτελέσματα που θα δούμε παρακάτω κάνουν την παραπάνω γενική αρχή πιο συγκεκριμένη.

Θεώρημα 6.7 (Συντελεστές C^k συναρτήσεων)
Αν $f \in C^k(\mathbb{T})$ τότε $\left|\widehat{f}(n)\right| = o(1/|n|^k)$.

Απόδειξη.
Αυτό αποτελεί βελτίωση του Θεωρήματος 3.1 που λέει ότι

$$\left|\widehat{f}(n)\right| = O(1/|n|^k).$$

Η βελτίωση οφείλεται σε χρήση του Λήμματος Riemann-Lebesgue (Θεώρημα 6.6). Αφού έχουμε από το Θεώρημα 3.1 για $n \neq 0$

$$\widehat{f}(n) = \frac{\widehat{f^{(k)}}(n)}{(in)^k}$$

και $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{T})$ (αφού είναι συνεχής) έπεται ότι

$$\lim_{|n|\to\infty} \widehat{f^{(k)}(n)} = 0$$

που συνεπάγεται το ζητούμενο. ∎

Το Πρόβλημα 5.11 αποτελεί επίσης μια έκφραση της αρχής «ομαλότητα συνεπάγεται μείωση των συντελεστών Fourier»: αν $f \in C^1(\mathbb{T})$ τότε ισχύει

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right| < \infty.$$

Το να είναι μια συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$ Lipschitz, το να υπάρχει δηλ. πεπερασμένος αριθμός $M > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \quad \text{για κάθε } x, y, \tag{6.9}$$

είναι μια συνθήκη ασθενέστερη από το να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη (π.χ. η $f(x) = |x|$ είναι Lipschitz με σταθερά $M = 1$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0).

Θεώρημα 6.8 (Συντελεστές Lipschitz συναρτήσεων)
Αν η $f \in C(\mathbb{T})$ είναι Lipschitz τότε $\left|\widehat{f}(n)\right| = O(1/|n|)$.

Απόδειξη.
Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\int f(x + (\pi/n))e^{-inx}\,dx = -\int f(x)e^{-inx}\,dx = -\widehat{f}(n).$$

Έχουμε λοιπόν

$$\left|\widehat{f}(n)\right| = \left|\frac{1}{4\pi}\int (f(x) - f(x + (\pi/n)))e^{-inx}\,dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{4\pi}\int M(\pi/|n|)\,dx$$

(από την ιδιότητα Lipschitz)

$$\leq \frac{\pi M}{2|n|}.$$

∎

Αν $\alpha \in (0, 1]$ λέμε ότι μια συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$ είναι Lipschitz-α αν υπάρχει πεπερασμένη σταθερά $M > 0$ τ.ώ. να ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha, \quad \text{για κάθε } x, y. \tag{6.10}$$

✏ **6.10.** *(α) Αν $0 < \alpha < \beta \le 1$ και μια συνάρτηση f είναι Lipschitz-β τότε είναι και Lipschitz-α. Για κάθε τέτοιο ζεύγος αριθμών α και β δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση g που είναι Lipschitz-α αλλά όχι Lipschitz-β.*

(β) Αν μια συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$ ικανοποιεί την (6.10) για κάποιο $\alpha > 1$ δείξτε ότι η συνάρτηση είναι αναγκαστικά σταθερή (και άρα δεν έχει ιδιαίτερη χρησιμότητα να μιλάμε για συναρτήσεις που είναι Lipschitz-α με $\alpha > 1$).

💡 *Για το (β), αν $x \neq y$ δείξτε ότι $g(x) = g(y)$ γράφοντας*

$$|g(x) - g(y)| \le |g(x) - g(x+\delta)| + |g(x+\delta) - g(x+2\delta)| + \cdots$$

$$\cdots + |g(x+(n-1)\delta) - g(y)|,$$

όπου $\delta = (y-x)/n$ και παίρνοντας $n \to \infty$ αφού χρησιμοποιήσετε την (6.10). ✏

Θεώρημα 6.9 (Συντελεστές Lipschitz-α συναρτήσεων)
Αν η $f \in C(\mathbb{T})$ είναι Lipschitz-α (για κάποιο $\alpha \in (0,1]$) τότε $\left|\widehat{f}(n)\right| = O(1/|n|^\alpha)$.

✏ **6.11.** *Αποδείξτε το Θεώρημα 6.9.*

💡 *Τροποποιήσετε ελάχιστα την απόδειξη του 6.8.* ✏

Στο επόμενο θεώρημα η μείωση των συντελεστών Fourier είναι αποτέλεσμα της μονοτονίας της συνάρτησης (η οποία πρέπει συνεπώς να θεωρείται κάποιο είδος ομαλότητας).

Θεώρημα 6.10 (Συντελεστές μονοτόνων συναρτήσεων)
Αν η f είναι μονότονη στο διάστημα $(-\pi, \pi)$ τότε $\left|\widehat{f}(n)\right| = O(1/|n|)$. Πιο συγκεκριμένα, αν $B = \lim_{x\to\pi-} f(x)$ και $A = \lim_{x\to(-\pi)+} f(x)$ είναι τα πλευρικά όρια στα άκρα (πάντα υπάρχουν λόγω μονοτονίας) τότε

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \le \frac{|B-A|}{\pi|n|}. \tag{6.11}$$

Απόδειξη.
Το δείχνουμε πρώτα όταν η συνάρτηση f είναι κλιμακωτή και αύξουσα (ή φθίνουσα· αυτό δεν έχει καμιά σημασία οπότε περιοριζόμαστε από δω και πέρα σε αύξουσες). Αν η συνάρτηση είναι της μορφής

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \chi_{[x_k, x_{k+1})}(t)$$

όπου $-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = \pi$ και $c_k \le c_{k+1}$, τότε μπορούμε να γράψουμε και

$$f(x) = c_0 + (c_1 - c_0)\chi_{[x_1,\pi]}(x) + (c_2 - c_1)\chi_{[x_2,\pi]}(x) + \cdots \tag{6.12}$$

$$\cdots + (c_{N-1} - c_{N-2})\chi_{[x_{N-1},\pi]}(x).$$

Για τη χαρακτηριστική ενός διαστήματος έχουμε μετά από πολύ εύκολο υπολογισμό

$$\widehat{\chi_{[a,b]}}(n) = \frac{i}{2\pi n}(e^{-ibn} - e^{-ian})$$

και άρα

$$\left|\widehat{\chi_{[a,b]}}(n)\right| \le \frac{1}{\pi|n|}. \tag{6.13}$$

Από την (6.12) και την (6.13) και το ότι οι ποσότητες $c_{j+1} - c_j$ είναι μη αρνητικές προκύπτει ότι

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \le \frac{c_{N-1} - c_0}{\pi|n|} \tag{6.14}$$

για $n \neq 0$, που αποδεικνύει το ζητούμενο για μονότονες κλιμακωτές συναρτήσεις αφού $A = c_0, B = c_{N-1}$.

Για να δείξουμε το ζητούμενο για οποιαδήποτε $f \in L^1(\mathbb{T})$ που είναι αύξουσα στο $(-\pi, \pi)$ χρειαζόμαστε το ακόλουθο αποτέλεσμα προσέγγισης.

✏ **6.12.** *Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ είναι αύξουσα στο $(-\pi, \pi)$ και τα A, B είναι όπως στην εκφώνηση του Θεωρήματος 6.10 τότε, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει αύξουσα κλιμακωτή συνάρτηση $g(x)$ τέτοια ώστε $\|f - g\|_1 \le \epsilon$ και επιπλέον $A \le \lim_{x\to(-\pi)+} g(x)$ και $B \ge \lim_{x\to\pi-} g(x)$.*

💡 *Για κάθε φυσικό N ορίζουμε τη διαμέριση $x_0 = -\pi < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = \pi$ με*

$$x_j = \inf\left\{x \in (-\pi, \pi) : \ f(x) \ge A + \frac{j}{N}(B - A)\right\},$$

για $j = 1, 2, \ldots, N-1$. Η αύξουσα κλιμακωτή συνάρτηση $g(x)$ ορίζεται να παίρνει τιμή $A + \frac{j}{N}(B - A)$ στο διάστημα $[x_j, x_{j+1})$ για $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Δείξτε τις ζητούμενες ιδιότητες για αυτή τη συνάρτηση $g(x)$ αν το N είναι αρκετά μεγάλο. Παρατηρήστε ότι δε χρειαζόμαστε κανένα θεώρημα πυκνότητας στον $L^1(\mathbb{T})$ (π.χ. δε χρειαζόμαστε το ότι οι συνεχείς συναρτήσεις είναι πυκνές ή ότι οι κλιμακωτές συναρτήσεις είναι πυκνές). ✏

Με δεδομένο το αποτέλεσμα του Προβλήματος 6.12 η απόδειξη του Θεωρήματος 6.10 συμπληρώνεται ως εξής. Αν η f είναι όπως στην εκφώνηση του Θεωρήματος και η g όπως στο Πρόβλημα 6.12 τότε

$$\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n) + \widehat{f-g}(n)$$

και $\left|\widehat{f-g}(n)\right| \le \|f - g\|_1 \le \epsilon$ ενώ για την g έχουμε από το πρώτο μέρος της απόδειξης ότι $|\widehat{g}(n)| \le |B - A|/(\pi|n|)$. Αφού το $\epsilon > 0$ είναι οτιδήποτε προκύπτει το ζητούμενο. ∎

Έχουμε δει, σε διάφορες μορφές της, την αρχή ότι η ομαλότητα της συνάρτησης συνεπάγεται ένα ρυθμό μείωσης των συντελεστών Fourier. Φυσιολογικά γεννιέται το ερώτημα αν υπάρχει όριο στο πόσο αργά μπορεί μια ακολουθία συντελεστών Fourier να συγκλίνει στο 0, όπως προβλέπει το Λήμμα

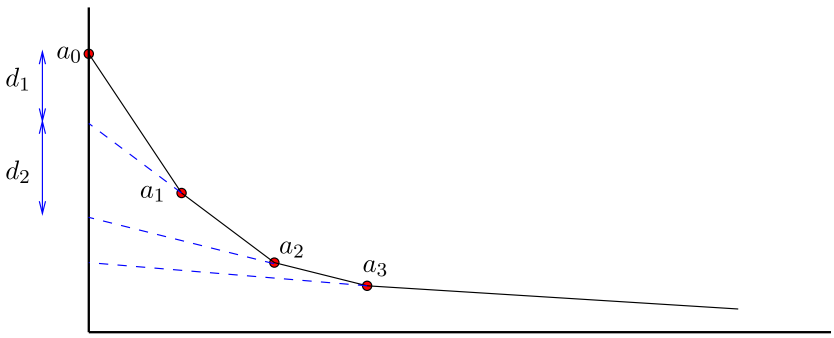
Riemann-Lebesgue (Θεώρημα 6.6). Συνέπεια του επόμενου Θεωρήματος 6.11 και του Προβλήματος 6.13 είναι ότι δεν υπάρχει τέτοιο όριο και ότι υπάρχουν L^1 συναρτήσεις των οποίων οι συντελεστές Fourier συγκλίνουν στο 0 όσο αργά θέλουμε.

Θεώρημα 6.11
Αν $a_{-n} = a_n$, $n \in \mathbb{Z}$, $a_n \ge 0$, $\lim_{|n|\to\infty} a_n = 0$ και η ακολουθία a_n, $n \ge 0$ είναι κυρτή, ισχύει δηλ.

$$a_n \le \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}), \quad (n \ge 1), \tag{6.15}$$

τότε υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{T})$ (μάλιστα ισχύει $f \ge 0$) τ.ώ. $\widehat{f}(n) = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη.
Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι οι συντελεστές Fourier ενός πυ-



Σχήμα 6.3: Πώς γράφουμε μια κυρτή ακολουθία σαν άθροισμα «τριγώνων»

ρήνα του Fejér K_N είναι μια άρτια κυρτή ακολουθία, όπως και η a_n. Έπειτα δείχνουμε ότι η ακολουθία a_n μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα

$$a_n = d_1\widehat{K_1}(n) + d_2\widehat{K_2}(n) + d_3\widehat{K_3}(n) + \cdots$$

όπου $d_j \ge 0$, για $j \ge 1$ και $\sum_{j=1}^{\infty} d_j = a_0$.

Ο ευκολότερος τρόπος είναι να δει κανείς ότι ισχύει κάτι τέτοιο είναι να παρατηρήσει (δείτε Σχήμα 6.3) ότι μια κυρτή πολυγωνική γραμμή (όπως αυτή που ορίζουν τα σημεία (j, a_j), $j \ge 0$) μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα από τρίγωνα όπως φαίνεται στο Σχήμα. Οι αριστερές πλευρές των τριγώνων είναι πάνω στον άξονα των y και έχουν μήκος d_j και οι πλευρές τους προκύπτουν αν προεκτείνουμε τις πλευρές $(j-1, a_{j-1})$–(j, a_j) της πολυγωνικής γραμμής προς τα αριστερά μέχρι να τμήσουν τον άξονα των y.

Αν τώρα θέσουμε

$$f(x) = d_1K_1(x) + d_2K_2(x) + d_3K_3(x) + \cdots$$

παίρνουμε μια μη αρνητική συνάρτηση στο L^1 (αφού $\|K_N\|_1 = 1$ και $\sum_{j=1}^{\infty} d_j = a_0 < \infty$) της οποίας οι συντελεστές είναι οι a_n. ∎

6.13. *Έστω $b_n \geq 0$, $n \geq 0$, μια φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει στο 0. Δείξτε ότι υπάρχει κυρτή (ικανοποιεί δηλ. την (6.15)) ακολουθία a_n, $n \geq 0$, τ.ώ. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ και*

$$a_n \geq b_n, \quad (n \geq 0).$$

Ορίστε πρώτα τις ακολουθίες $x_n, y_n \geq 0$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$, ως εξής: $x_0 = 0$ και $y_0 = 2b_0$ και για $n \geq 1$ ορίζουμε $y_n = \frac{1}{2}y_{n-1}$ και

$$x_n = \min\left\{N(y_{n-1}/4), x_{n-1} + \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{2}\right\},$$

όπου

$$N(\epsilon) = \min\{n \in \mathbb{N} : \ k \geq n \implies b_k \leq \epsilon\}.$$

Δείξτε ότι η τεθλασμένη γραμμή που ορίζουν τα σημεία

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$$

είναι το γράφημα μιας κυρτής συνάρτησης $f : [0. + \infty) \to (0, +\infty)$ με $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ορίστε $a_n = f(n)$, για $n = 0, 1, \ldots$.

Αντίθετα με την περίπτωση του Θεωρήματος 6.11 όπου η ακολουθία a_n είναι άρτια, αν μια συνάρτηση έχει περιττή ακολουθία συντελεστών Fourier τότε αυτοί υπόκεινται σε κάποια ελάχιστη ταχύτητα σύγκλισης στο 0.

Θεώρημα 6.12
Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $-\widehat{f}(-n) = \widehat{f}(n) \geq 0$ για $n \geq 0$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(n)}{n} < \infty. \tag{6.16}$$

Απόδειξη.
Αφού $\widehat{f}(0) = \int f = 0$ έπεται ότι η συνάρτηση

$$F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$$

είναι συνεχής (από την ολοκληρωσιμότητα της f; δείτε τις σημειώσεις για το ολοκλήρωμα Lebesgue) και 2π-περιοδική. Από το Πρόβλημα 3.20 έχουμε

$$\widehat{F}(n) = \frac{1}{in}\widehat{f}(n), \quad (n \neq 0).$$

Το Θεώρημα του Fejér (Θεώρημα 4.7) για τη συνεχή συνάρτηση iF μας λέει ότι $\sigma_N(iF)(0) \to iF(0) = 0$. Αλλά

$$\sigma_N(iF)(0) = i\widehat{F}(0) + 2\sum_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{n}{N+1}\right)\frac{\widehat{f}(n)}{n}$$

$$\to i\widehat{F}(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\widehat{f}(n)}{n},$$

άρα
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(n)}{n} = -i \int F.$$
∎

Το επόμενο εύκολο πόρισμα του Θεωρήματος 6.12 είναι το πρώτο αποτέλεσμα που συναντάμε από το οποίο φαίνεται ότι υπάρχουν ακολουθίες που συγκλίνουν στο 0 και οι οποίες δεν είναι ακολουθίες συντελεστών Fourier κάποιας L^1 συνάρτησης. Πάρτε για παράδειγμα $a_n = \frac{1}{\log n}$ στο Πόρισμα 6.3.

Πόρισμα 6.3
Αν $a_n \geq 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \infty$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt$ δεν είναι σειρά Fourier κάποιας L^1 συνάρτησης.

6.8 Η ανισότητα Bernstein.

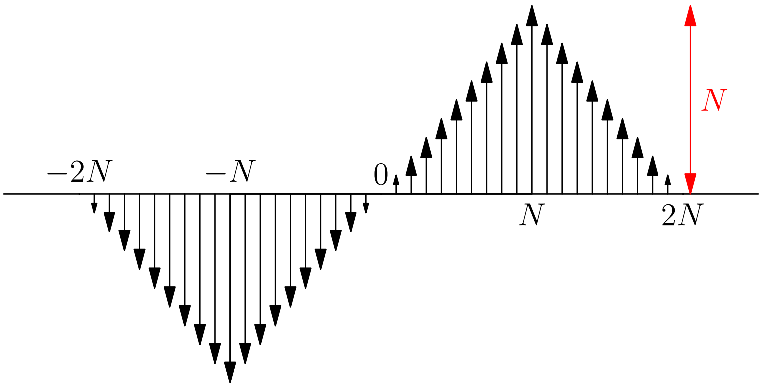
Θεώρημα 6.13
Αν $P(x) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{P}(k) e^{ikx}$ είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού $\leq N$ τότε ισχύει
$$\left\|P'\right\|_\infty \leq N \|P\|_\infty. \tag{6.17}$$

✏ **6.14.** *Δείξτε ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο $P(x)$, βαθμού N, για το οποίο η (6.17) ισχύει ως ισότητα.* ✏

Απόδειξη.
Θα αποδείξουμε πρώτα την ασθενέστερη ανισότητα
$$\left\|P'\right\|_\infty \leq 2N \|P\|_\infty. \tag{6.18}$$
Έπειτα θα δείξουμε πώς τροποποιείται η απόδειξη ώστε να δείξουμε την ανισότητα (6.17).

Ας είναι $F(x) \in L^1(\mathbb{T})$ τ.ώ. να ισχύει
$$\widehat{F}(k) = k, \quad (\text{για } |k| \leq N). \tag{6.19}$$
Τότε $P'(x) = iP * F(x)$ αφού τα δυο μέλη της ισότητας αυτής έχουν ίδιους συντελεστές Fourier (θυμηθείτε ότι $\widehat{P'}(k) = ik\widehat{P}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, και ότι οι συντελεστές Fourier της συνέλιξης $a * b$ είναι οι $\widehat{a}(k)\widehat{b}(k)$). Άρα έχουμε
$$\left\|P'\right\|_\infty \leq \|P\|_\infty \|F\|_1. \tag{6.20}$$
Αρκεί λοιπόν να βρούμε μια συνάρτηση F που να ικανοποιεί την (6.19) και να έχει όσο γίνεται πιο μικρή L^1 νόρμα. Μια καλή επιλογή είναι η συνάρτηση F της οποίας οι συντελεστές Fourier φαίνονται στο Σχήμα 6.4.

Η συνάρτηση αυτή μπορεί να γραφεί ως
$$F(x) = NK_{N-1}(x)e^{iNx} - NK_{N-1}(x)e^{-iNx},$$
(δείτε και το Σχήμα 4.6) και άρα $\|F\|_1 \leq 2N$ από την τριγωνική ανισότητα και το γεγονός ότι ο πυρήνας του Fejér $K_M(x)$ έχει



Σχήμα 6.4: Οι συντελεστές Fourier της $F(x)$

$\|K_M\|_1 = \int K_M = 1$ για κάθε φυσικό αριθμό M. Χρησιμοποιώντας λοιπόν αυτή τη συνάρτηση στην (6.20) έχουμε αποδείξει την (6.18).

Για να αποδειξουμε την (6.17) θα χρειαστεί να βρούμε μια άλλη συνάρτηση $F(x)$ η οποία να ικανοποιεί την (6.19) και να έχει L^1 νόρμα οσοδήποτε κοντά στο N (αντί για $2N$ που έχουμε ήδη καταφέρει).

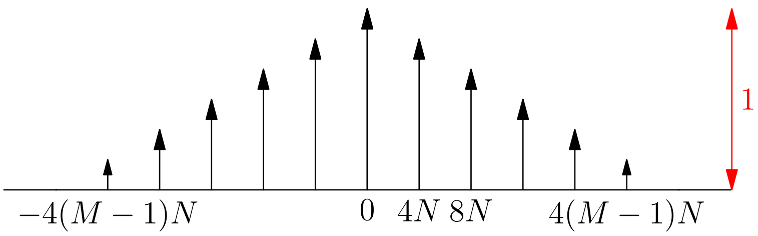
Έστω λοιπόν $\epsilon > 0$. Ορίζουμε μια νέα συνάρτηση $G(x)$ τ.ώ. να ισχύει $P' = iG * P$ όπως πριν (αυτό ισοδυναμεί με το ότι $\widehat{G}(n) = n$ για $|n| \le N$) και τέτοια ώστε

$$\|G\|_1 \le (1+\epsilon)N. \tag{6.21}$$

Αφού $\|P'\|_\infty \le \|G\|_1 \|P\|_\infty$ και $\epsilon > 0$ μπορεί να είναι οσοδήποτε μικρό προκύπτει η (6.17). Μια συνάρτηση G για την οποία ισχύουν τα παραπάνω είναι η

$$\begin{aligned} G(x) &= NK_{N-1}(x)(K_M(4Nx)e^{iNx} - K_M(4Nx)e^{-iNx}) \\ &= NK_{N-1}(x)\left((2i\sin Nx)K_M(4Nx)\right), \end{aligned}$$

όπου $M > N$ είναι αρκετά μεγάλο (ανάλογα με το πόσο μικρό είναι το ϵ). Αρκεί να δείξουμε ότι ότι $\|K_{N-1}(x)K_M(4Nx)\sin Nx\|_1$ γίνεται οσοδήποτε κοντά στο 1/2 όταν το M γίνεται αρκετά μεγάλο. Αυτό είναι το αντικείμενο του Προβλήματος 6.16 με το οποίο συμπληρώνεται η απόδειξη της (6.17).



Σχήμα 6.5: Οι συντελεστές Fourier της $K_M(4Nx)$ είναι αυτοί της $K_M(x)$ «ανοιγμένοι» κατά $4N$

✏ **6.15.** *Σχεδιάστε το γράφημα της $\widehat{G}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Αυτό είναι πολύ σημαντικό για να καταλάβετε γιατί η $G(x)$ έχει $\widehat{G}(n) = n$ για $|n| \le N$.*

💡*Σχεδιάστε πρώτα τους συντελεστές Fourier της συνάρτησης $K_{N-1}(x)K_M(4Nx)e^{iNx}$, χρησιμοποιώντας το Σχήμα 6.5 και τα Προβλήματα 2.20 και 2.21.* ✏

✏ **6.16.** *Αποδείξτε ότι*

$$\limsup_{M\to\infty} \|K_{N-1}(x)K_M(4Nx)\sin Nx\|_1 \le 1/2.$$

💡*Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες στα παρακάτω.*

(α) Η μάζα του πυρήνα $K_M(x)$ «συγκεντρώνεται» κοντά στο 0 (δείτε Ορισμό 4.1 του τι σημαίνει «καλός πυρήνας», ιδιότητα 3) άρα η μάζα του $K_M(4Nx)$ συγκεντρώνεται στα σημεία $x = (\ell/4N)2\pi$, $\ell = 0, 1, \dots, 4N-1$. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι για ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int K_M(4Nx)\phi(x)\,dx,$$

όπου $\phi(x) \in C(\mathbb{T})$, σημασία έχουν, για μεγάλες τιμές του M, μόνο οι τιμές της $\phi(x)$ στα σημεία $(\ell/4N)2\pi$, $\ell = 0, 1, \dots, 4N-1$.

(β) Για $x \in [0, 2\pi]$ «κοντά» σε ένα σημείο της μορφής $(\ell/4N)2\pi$ το $|\sin Nx|$ είναι κοντά στο 0 ή στο 1. (Αν $\ell = 0$ ή $2 \bmod 4$ τότε είναι κοντά στο 0 και είναι κοντά στο 1 αν $\ell = 1$ ή $3 \bmod 4$.) Άρα, λόγω της παρατήρησης στο (α), το ολοκλήρωμα

$$\|K_{N-1}(x)K_M(4Nx)\sin Nx\|_1 = \int K_{N-1}(x)K_M(4Nx)|\sin Nx|\,dx$$

προσεγγίζεται από το

$$\int K_{N-1}(x)K_M(4Nx)\sin^2 Nx\,dx. \tag{6.22}$$

(γ) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta$ και γράφουμε το προηγούμενο ολοκλήρωμα ως

$$\frac{1}{2}\int K_{N-1}(x)K_M(4Nx)\,dx - \frac{1}{2}\int K_{N-1}(x)K_M(4Nx)\cos 2Nx\,dx. \tag{6.23}$$

Όλοι οι συντελεστές Fourier των συναρτήσεων

$$K_{N-1}(x), \quad K_M(4Nx) \text{ και } \cos 2Nx$$

είναι μη αρνητικοί, άρα (δείτε το Πρόβλημα 2.20) το δεύτερο ολοκλήρωμα στην (6.23) είναι μη αρνητικό αφού είναι ο μηδενικός συντελεστής Fourier της συνάρτησης. Το πρώτο ολοκλήρωμα στην (6.23) ισούται με 1 αφού εύκολα βλέπουμε ότι ο μηδενικός συντελεστής Fourier της

$$K_{N-1}(x)K_M(4Nx)$$

ισούται με 1 (και πάλι αναφερθείτε στο Πρόβλημα 2.20 και στο Σχήμα 6.5). Άρα το (6.22) είναι $\le 1/2$. ✏

∎

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου

[1] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Cambridge University Press, 2004.

[2] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Fourier analysis: an introduction*. Vol. 1. Princeton University Press, 2011.

[3] Antoni Zygmund. *Trigonometric series*. Cambridge University Press, 2002.

Ευρετήριο