Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Ασκήσεις Νο 10 (ειδικό για μιγαδικούς αριθμούς)

Σκοπός των παρακάτω ασκήσεων είναι να σας βοηθήσουν να εξοικειωθείτε με το χειρισμό των μιγαδικών αριθμών. Προσπαθήστε όσο μπορείτε να αποφεύγετε το να διασπάτε ένα μιγαδικό αριθμό σε πραγματικό και φανταστικό μέρος.

1. $|z+w| = |z| + |w| \iff \mathrm{Re}\,(z\overline{w}) = |z||w|$.

2. $|z| = |w| = 1,\ zw \neq -1 \implies \dfrac{z+w}{1+zw} \in \mathbb{R}$.

3. Αν $|z| = |w| = 1, \quad |z+w| = \sqrt{3}$ βρείτε το $|z-w|$.

4. Αν $|z| = |w| = |u|, \quad z+w+u = 0$ τότε υπάρχει $\phi \in [0, 2\pi)$ ώστε $\{z, w, u\} = \left\{e^{i\phi}, e^{i\phi}e^{2\pi i/3}, e^{i\phi}e^{4\pi i/3}\right\}$.

5. Βρείτε όλα τα ακέραια n ώστε

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2.$$

6. $\mathrm{Re}\, z > 1 \implies \left|\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$

7. Η γενική εξίσωση μιας ευθείας στο επίπεδο είναι η

$$Ax + By + C = 0,$$

όπου $A, B, C \in \mathbb{R}$ είναι σταθερές. Γράψτε την εξίσωση αυτή μέσω των $z, \overline{z}$ (χωρίς τα x, y).

8. Δείξτε ότι η εξίωση

$$z\overline{z} + az + \overline{az} + b = 0,$$

με $a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{R}$ ικανοποιείται από τα z που ανήκουν σε ένα κύκλο.

9. Αν $z = x + iy$ με x σταθερό και $y \to +\infty$ δείξτε ότι

$$|\cos z| = \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) e^y, \quad \mathrm{Arg} \cos z = -x + o(1).$$

Εδώ $o(1)$ είναι μια ποσότητα που τείνει στο 0 για $y \to +\infty$.