

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ' ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως αντιγραφή.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Ενδιάμεσο διαγώνισμα - 21 Νοεμβρίου 2019
Διάρκεια: 2 ώρες

Όλες οι καμπύλες είναι θετικά προσανατολισμένες εκτός αν προσδιορίζεται διαφορετικά.

1. (i) Βρείτε τα υποσύνολα του \mathbb{C} (ενδεχομένως κενά) που ορίζονται από τις σχέσεις:

$$(a) |z^2| = |z|^3, \quad (b) |z| = |z-1| = |z+1|, \quad (c) \bar{z} - 1 = z + 1.$$

- (ii) Βρείτε όλα τα z για τα οποία ισχύει

$$\bar{z} = z^3.$$

Υπόδειξη: προσέξτε το σημείο 0.

2. (i) Δείξτε ότι το άθροισμα των n -οστών ριζών ενός οποιουδήποτε μιγαδικού αριθμού είναι 0.
(ii) Δείξτε ότι για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

3. (i) Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό της παραγώγου δείξτε ότι η συνάρτηση z^2 είναι παραγωγίσιμη παντού.

(ii) Δείξτε ότι η συζυγής της συνάρτησης στο (i) δεν είναι παραγωγίσιμη παρά μόνο στο 0. Εδώ δεν περιορίζεστε μόνο στον ορισμό.

4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\oint_C \frac{dz}{z^2(z-1)^2},$$

όπου C είναι ο κύκλος $|z| = 2$.

5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\oint_C \frac{e^{\pi z} dz}{(z^2+1)^2}$$

όπου C είναι ο κύκλος $|z| = 2$.

6. Δείξτε την ανισότητα

$$\left| \oint_C \frac{e^z dz}{z^2+2} \right| \leq e\pi,$$

όπου C είναι το δεξί ημικύκλιο του μοναδιαίου κύκλου.