---

1. Βρείτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης $\cos z$ γύρω από το $\pi/2$.

2. Υποθέστε ότι $f = g'$ στο χωρίο $|z - z_0| < r$. Υποθέστε ότι οι f, g είναι αναλυτικές στο χωρίο αυτό. Υποθέστε ακόμη ότι $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n (z - z_0)^n$ στο χωρίο αυτό. Βρείτε τη σειρά Taylor της f μέσω των g_n.

3. Βρείτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης $\operatorname{Log}(1 - z)$ γύρω από το 0. Πού συγκλίνει;

4. Βρείτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{1}{1 - z}$$

με κέντρο το 1/2. Να προσδιορίσετε σε ποιο δίσκο συγκλίνει η δυναμοσειρά αυτή.

Επαναλάβετε το ίδιο ερώτημα με κέντρο στο 1/3.

Υπόδειξη: Γράψτε $w = z - \frac{1}{2}$. Τότε

$$\frac{1}{1 - z} = \frac{2}{1 - 2w} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (2w)^n.$$

Επαναλάβετε το ίδιο ερώτημα με κέντρο στο 2.

5. Υποθέστε ότι η f είναι αναλυτική στο χωρίο $|z| < 1$ και ότι $f \equiv 0$ πάνω στον πραγματικό άξονα. Δείξτε ότι $f \equiv 0$ στο χωρίο $|z| < 1$.

Υπόδειξη: Οι τιμές της f πάνω στον πραγματικό άξονα αρκούν για να προσδιορίσουν όλες τις παραγώγους της στο 0.

6. Βρείτε όλα τα αναπτύγματα Laurent (σε όλους τους δακτυλίους που ορίζονται από τις ανωμαλίες τη συνάρτησης) γύρω από το σημείο z_0 που δίδεται.

(a) $f(z) = \dfrac{1}{1 - z}, z_0 = 0,$ $\quad (b)$ $f(z) = \dfrac{1}{1 - z}, z_0 = 2,$ $\quad (c)$ $f(z) = e^{1/z}, z_0 = 0,$ $\quad (d)$ $f(z) = \dfrac{z}{(z - 1)(z - 3)}, z_0 = 1.$

7. Υποθέστε ότι έχετε το ανάπτυγμα Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad (r < |z| < R).$$

Βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης

$$g(z) = (az^2 + bz + c) f(z).$$